УДК 512.66

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 7
Глава 1. Комплексы и когомологии 11
§ 1. Комплексы и точная последовательность 11
§ 2. Стандартные комплексы в алгебре и геометрии 12
§ 3. Спектральная последовательность 20
Библиографические указания 25
Глава 2. Язык категорий 26
§ 1. Категории и функторы 26
§ 2. Аддитивные и абелевы категории 39
§ 3. Функторы в абелевых категориях 46
§ 4. Классические производные функторы 52
Библиографические указания 57
Глава 3. Гомологии в алгебре и геометрии 58
§ 1. Малые размерности 58
§ 2. Препятствия, торсоры, характеристические классы . . . 61
§ 3. Циклические (ко)гомологии 65
§ 4. Некоммутативная дифференциальная геометрия 73
§ 5. (Ко)гомологии дискретных групп 77
§ 6. Когомологии алгебр Ли: общие сведения 81
§ 7. Непрерывные когомологии групп Ли 84
§ 8. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли 88
Библиографические указания 92
Глава 4. Производные категории и производные функторы . . . 93
§ 1. Определение производной категории 99
§ 2. Производная категория как локализация гомотопической . 104
§ 3. Структура производной категории 109
§ 4. Производные функторы от аддитивных функторов . . . 119
§ 5. Когомологии пучков 130
Библиографические указания 130

Глава 5. Триангулированные категории 130
§ 1. Основные понятия 130
§ 2. Примеры 138
§ 3. Сердцевины 143
Библиографические указания 150
Глава 6. Смешанные структуры Ходжа 150
§ 0. Введение 150
§ 1. Категория структур Ходжа 153
§ 2. Смешанные структуры Ходжа на когомологиях с постоянными коэффициентами 156
§ 3. Структуры Ходжа на гомотопических инвариантах . . . 159
§ 4. Комплексы Ходжа — Делиня 164
§ 5. Комплексы Ходжа — Делиня многообразий с особенностями и симплициальных многообразий 167
§ 6. Комплексы Ходжа — Бейлинсона и производные категории структур Ходжа 169
§ 7. Вариации структур Ходжа 172
Библиографические указания 175
Глава 7. Превратные пучки 175
§ 1. Превратные пучки 175
§ 2. Склейка 181
Библиографические указания 185
Глава 8. $\mathscr{D}$-модули 186
§ 0. Введение 186
§ 1. Алгебра Вейля 189
§ 2. Алгебраические $\mathscr{D}$-модули 196
§ 3. Обратный образ 203
§ 4. Прямой образ 205
§ 5. Голономные модули 210
§ 6. Связности с регулярными особенностями 217
§ 7. $\mathscr{D}$-модули с регулярными особенностями 222
§ 8. Эквивалентность категорий (соответствие Римана — Гильберта) 225
Библиографические указания 227
Литература 227

Введение

1. Гомологическая алгебра сравнительно молода. Ее предмет восходит к двум сериям исследований конца прошлого века, давшим начало комбинаторной топологии и «современной алгебре» (в смысле ван дер Вардена) соответственно. В качестве главных понятий, унаследованных от этого раннего этапа, можно назвать числа Бетти топологических пространств и «теорему о цепях сизигий» Д. Гильберта (1890 год).

Сейчас мы легко различаем общую конструкцию, с которой связано возникновение этих понятий. Топологическое пространство X склеено из клеток (или симплексов) разных размерностей i; граница клетки есть линейная комбинация клеток; граница границы равна нулю: i-е число Бетти есть количество независимых цепей с нулевой границей (циклов) с точностью до цепей, которые сами являются границей, то есть ранг группы $\operatorname{Ker}\partial_i/\operatorname{Im}\partial_{i-1}$, $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ — граничный оператор, C_i — i-мерные цепи. «Сизигии» возникают из другой задачи. Пусть M — градуированный модуль с конечным числом образующих над кольцом многочленов $A=k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем k (градуированных степенью). Гильберт рассматривал случай, когда M — идеал в A, порожденный формами. Вообще говоря, образующие M нельзя выбрать независимыми. Фиксировав систему r_0 образующих, мы получаем подмодуль в A^{r_0}. состоящий из коэффициентов всех соотношений между выбранными образующими. Он естественно градуирован и называется «первым модулем сизигий» $Z_0(M)$ модуля M. Положим $Z_i(M)=Z_0(Z_{i-1}(M))$ для $i\geqslant 1$ (на каждом шаге возникает произвол в выборе системы образующих $Z_{i-1}(M)$). Теорема Гильберта утверждает, что $Z_{n-1}(M)$ — свободный модуль, то есть всегда можно считать, что $Z_n(M)=0$.

Алгебраический костяк обеих конструкций — это комплекс: последовательность модулей и гомоморфизмов $\ldots \to K_i \xrightarrow{\partial_i} K_{i-1} \to \ldots$ с условием $\partial_{i-1}\partial_i=0$. Комплекс цепей пространства X определяет его гомологии $H_i(X)=\operatorname{Ker}\partial_i/\operatorname{Im}\partial_{i+1}$. Комплекс Гильберта состоит из свободных модулей. Он ацикличен, кроме конца: $Z_i(M)$ — это одновременно циклы и границы свободной резольвенты модуля M:

$$\ldots 0 \to A^{r_n} \to A^{r_{n-1}} \to \ldots \to A^{r_1} \xrightarrow{\partial_1} A^{r_0} \xrightarrow{\partial_0} 0 \to \ldots,$$

$$M \simeq \operatorname{Ker}\partial_0 = A^{r_0}/\operatorname{Im}\partial_1$$

Оба комплекса — цепи пространства X и резольвента модуля M — определены далеко не однозначно: они зависят от выбора разбиения X на клетки или от выбора последовательных систем образующих модулей сизигий. Содержание первых теорем гомологической алгебры состоит в том, что при смене комплекса кое-что от произвола не зависит: числа Бетти (или сами группы гомологий) в первом случае, максимальная длина комплекса (место, за которым уже всегда можно поставить нуль) — во втором.

Первый этап гомологической алгебры был связан с накоплением материала. Комбинаторная и затем гомотопическая топология доставила в изобилии:

— образцы и примеры комплексов;

— правила работы с ними, отражавшие геометрические конструкции над пространствами: произведение пространств привело к изучению тензорных произведений комплексов; изучение умножения в когомологиях — к понятию дифференциальной градуированной алгебры; понятие гомотопии — к алгебраическому определению гомотопии между морфизмами комплексов; геометрическое изучение расслоенных пространств — к спектральной последовательности, связанной с фильтрованным комплексом и т. д. и т. п.;

— алгебраические конструкции, имитировавшие топологические: так возникли определения когомологий групп, алгебр Ли, ассоциативных алгебр.

2. Появившаяся в 1956 году (а написанная между 1950 и 1953 гг.) монография А. Картана и С. Эйленберга «Гомологическая алгебра» [40] подвела итоги этого первого этапа и одновременно ввела новые важные идеи, определившие развитие этого раздела алгебры на многие годы вперед. По-видимому, и само название «гомологическая алгебра» стало общепринятым после этой книги.

В ней, во-первых, с чрезвычайной полнотой был проработан основной алгебраический формализм групп (ко)гомологий комплексов и средств работы с ними, безотносительно к происхождению. Во-вторых, в ней был дан принципиально важный ответ на вопрос, какова вообще природа гомологических инвариантов (в отличие от самих комплексов, которые инвариантами не являются). Этот ответ состоит в следующем. Важнейшие операции над модулями, как тензорное произведение, модуль гомоморфизмов и т. п. после применения к коротким точным последовательностям нарушают их точность: если $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точна, то $0 \to N \otimes M' \to N \otimes M \to N \otimes M'' \to 0$ может иметь нетривиальные гомологии в левом члене. Можно определить «произведение кручения» $\mathrm{Tor}_1(N, M'')$ так, что получится ацикличный комплекс

$$\mathrm{Tor}_1(N, M') \to \mathrm{Tor}_1(N, M) \to \mathrm{Tor}_1(N, M'') \to N \otimes M' \to N \otimes M \to N \otimes M'' \to 0,$$

но для продолжения его налево следует определить еще $\mathrm{Tor}_2(N, M'')$ и т. п.

Эти модули $\mathrm{Tor}_i(N, M)$ суть производные функторы (по одному из аргументов) функтора $\otimes$. Они определены однозначно тем, что переводят точные тройки в ацикличные комплексы. Вычисляются же они с помощью, скажем, свободных резольвент модуля M как группы гомологий такой резольвенты, тензорно умноженной на N.

Таким образом, гомологический инвариант модуля N выступает как значение некоторого высшего производного функтора на N, однозначно *характеризуемого* списком свойств и *вычисляемого* с помощью резольвент.

Эта идея, возникшая в алгебраическом контексте, немедленно вернулась в топологию в очень важной работе А. Гротендика «О некоторых вопросах гомологической алгебры» [77], опубликованной в 1957 году. Гротендик полностью пересмотрел систему основных понятий комбинаторной топологии, чтобы иметь возможность провести точку зрения Картана—Эйленберга. До этого было понятно, что (ко)гомологии пространства зависят в первую очередь от пространства X, и их аксиоматическая характеризация описывала поведение $H(X)$ при переходе к открытому подпространству (аксиома вырезания), гомотопии и т. п. Но пространства X не похожи на модули над кольцом, и в этом контексте $H(X)$ вовсе не выглядели как производные функторы. Гротендик подчеркнул роль второго, «скрытого» параметра когомологической теории — группы коэффициентов. Оказалось, что если рассматривать когомологии $H^i(X, \mathcal{F})$ с коэффициентами в произвольном пучке абелевых групп $\mathcal{F}$ над X (это понятие к началу пятидесятых годов было выделено и детально изучено в связи с нуждами теории функций многих комплексных переменных), то на X можно, вообще, почти «не обращать внимания»! Именно, $H^i(X, \mathcal{F})$ оказывается i-м производным функтором от $\mathcal{F}\Gamma(X, \mathcal{F})$ (функтор глобальных сечений пучка) в стиле Картана—Эйленберга.

Эта идея оказалась необыкновенно плодотворной для топологии в широком смысле слова. Подвергнутая далекому развитию и обобщению в работах самого Гротендика, его учеников и сотрудников, она привела к возникновению алгебраической топологии алгебраических многообразий над произвольными полями («программа Вейля»). Венцом последней было доказательство гипотез Римана—Вейля в работах П. Делиня. Необходимо еще отметить когомологическую версию классической теории полей классов (Шевалле, Дж. Тэйт и другие), современную версию теории Ходжа (Гриффитс, Делинь...), теорию превратных (perverse) пучков и общее проникновение гомологического языка в разнообразные области математики.

3. В шестидесятые годы гомологическая алгебра обогатилась еще одной существенной конструкцией. Мы имеем в виду производные и общие триангулированные категории.

Если до этого основной заботой математика, работающего с гомологическим аппаратом, были гомологические инварианты, то в последние два десятилетия упор перемещается на прямую работу с комплексами, которые рассматриваются, однако, как объекты сложно устроенной и не слишком явно описываемой категории. Идея состоит в том, что, скажем, резольвента модуля есть не просто техническое средство для вычисления связанных с ним Tor'ов и Ext'ов, но в некотором роде полноправный заменитель этого модуля. Нужно лишь научиться не различать разные резольвенты. Точно так же комплекс цепей пространства, снабженный необходимым количеством алгебраических структур, есть полноценный заменитель этого пространства.

Хотя аксиоматика и первоначальные конструкции теории производных и триангулированных категорий довольно громоздки, оказывается, что этот аппарат очень гибок, и в последние годы он становится необходимым во многих областях топологии, теории представлений, теории аналитических пространств, не говоря уже об алгебраической геометрии, с которой все и пошло (семинары Гротендика, диссертация Вердье, записки Хартсхорна).

Один из парадоксальных результатов развития гомологической алгебры, который постепенно осознается, состоит в том, что в ряде случаев удачно выбранные триангулированные категории устроены проще, чем те абелевы категории, которые были в поле зрения первоначально. Так, производную категорию когерентных пучков на проективном пространстве мы понимаем лучше, чем категорию самих когерентных пучков. Далее, в одной и той же триангулированной категории может быть много абелевых «сердцевин», что служит источником содержательных версий различных классических двойственностей.

4. Этот том данной серии не ставит своей целью дать полный обзор известных к настоящему моменту результатов гомологической алгебры. Такая задача, вероятно, и не разрешима; кроме ограниченной компетенции авторов, этому мешает огромный объем материала.

Том можно грубо разделить на три части. В вводных главах 1—3 излагаются наиболее классические части предмета, до сих пор составляющие его основной аппарат, периодически пополняемый новыми конкретными конструкциями. К сравнительно свежему материалу здесь относится, например, введение в циклические (ко)гомологии.

В главах 4—5 объяснены производные и триангулированные категории.

Наконец, главы 6—8 посвящены геометрическим приложениям современной гомологической алгебры к теории смешанных структур Ходжа, превратных пучков и $\mathscr{D}$-модулей. В топологических и алгебро-геометрических выпусках этого издания читатель найдет много параллельного и дополнительного материала; мы делаем упор в этом томе на категорные и гомологические аспекты.

Список литературы, далеко не полный, поможет заинтересованному читателю подробнее ознакомиться с затронутыми темами.

Отметим ещё, что ссылки в тексте будут делаться с указанием главы и пункта, например, гл. 2, п. 2.1 или гл. 1, п. 1.5.1. Если речь идет о текущей главе, то номер главы не указывается.

Глава 1

КОМПЛЕКСЫ И КОГОМОЛОГИИ

§ 1. Комплексы и точная последовательность

1.1. Комплексы. *Цепной комплекс* — это последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$C_{\cdot}: \ldots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

со свойством $d_n \circ d_{n+1} = 0$ для всех n. Гомоморфизмы d_n называются *граничными операторами* или *дифференциалами*. *Коцепной комплекс* — это аналогичная последовательность

$$C^{\cdot}: \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

со свойством $d^n \circ d^{n-1} = 0$. Цепной комплекс можно рассматривать как коцепной, обратив нумерацию: $C^n = C_{-n}$, $d^n = d_{-n}$. Поэтому мы часто будем ограничиваться коцепными комплексами. Комплекс A-модулей — это комплекс, в котором C_n (соответственно C^n) являются модулями над кольцом A, а d_n (соответственно d^n) — гомоморфизмами модулей.

1.2. Гомологии и когомологии. Поскольку $d_n \circ d_{n+1} = 0$, имеем $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \operatorname{Ker} d_n$. *Гомологии* цепного комплекса — это группы $H_n(C_{\cdot}) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. *Когомологии* коцепного комплекса — это группы $H^n(C^{\cdot}) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$. Употребительная терминология: элементы C_n — n-мерные цепи; C^n — n-мерные коцепи; $\operatorname{Ker} d_n = Z_n$ — n-мерные циклы, $\operatorname{Ker} d^n = Z^n$ — коциклы; $\operatorname{Im} d_{n+1} = B_n$ — границы; $\operatorname{Im} d^{n-1} = B^n$ — кограницы. Если $C^{\cdot}$ — комплекс A-модулей, то его когомологии являются A-модулями. Комплекс называется *ацикличным* (или точной последовательностью), если $H^n(C^{\cdot}) = 0$ для всех n.

1.3. Морфизмы комплексов. *Морфизм* $f: C^{\cdot} \to D^{\cdot}$ — это семейство гомоморфизмов групп (модулей) $f^n: C^n \to D^n$, коммутирующих с дифференциалами: $f^{n+1}\circ d_C^n=d_D^n\circ f^n$. Морфизм f индуцирует морфизм когомологий $H^\cdot(f)=(H^n(f):H^n(C)\to H^n(D))$: *класс коцикла* $c\mapsto$ *класс* $f(c)$. Если $C^\cdot$, $D^\cdot$ — комплексы A-модулей и f^n — гомоморфизмы A-модулей, то $H^n(f)$ — гомоморфизмы A-модулей.

Гомотопией между морфизмами комплексов $f,\ g:C^\cdot\to D^\cdot$ называется такое семейство гомоморфизмов групп $h^n:C^n\to D^{n-1}$, что $f^n-g^n=h^{n+1}\circ d^n+d^{n-1}\circ h^n$. Гомотопные нулю морфизмы образуют «идеал», то есть устойчивы относительно сложения и композиции с любым морфизмом.

1.3.1. Лемма. *Если* f, g *гомотопны, то* $H^n(f)=H^n(g)$. (Действительно, если c — коцикл, то $f(c)=g(c)+d(h(c))$, так что классы $f(c)$ и $g(c)$ совпадают.) ■

1.4. Точная тройка комплексов. Последовательность комплексов и морфизмов $0\to K^\cdot\xrightarrow{f}L^\cdot\xrightarrow{g}M^\cdot\to 0$ называется точной (или точной тройкой), если для каждого n последовательность групп (модулей) $0\to K^n\xrightarrow{f^n}L^n\xrightarrow{g^n}M^n\to 0$ точна.

1.5. Связывающий гомоморфизм. Пусть $0\to K^\cdot\to L^\cdot\to M^\cdot\to 0$ — точная тройка комплексов. Для каждого n определим гомоморфизм $\delta^n=\delta^n(f, g):H^n(M^\cdot)\to H^{n+1}(K^\cdot)$. Пусть $m\in M^n$ — цикл. Выберем $l\in L^n$ с $g^n(l)=m$; тогда $g^{n+1}(d^n(l))=0$, так что $d^n(l)=f^{n+1}(k)$ для некоторого $k\in K^{n+1}$. Очевидно, $d^{n+1}k=0$. Положим δ^n (класс m) $=$ класс k. Прямая проверка показывает, что определение не зависит от произвольных выборов.

1.5.1. Теорема. Последовательность когомологий

$$\ldots\to H^n(K^\cdot)\xrightarrow{H^n(f)}H^n(L^\cdot)\xrightarrow{H^n(g)}H^n(M^\cdot)\xrightarrow{\delta^n(f,g)}H^{n+1}(K^\cdot)\to\ldots$$

точна. ■

§ 2. Стандартные комплексы в алгебре и геометрии

2.1. Симплициальные множества. Большая часть комплексов, появляющихся в гомологической алгебре, имеет топологическое происхождение или связана с топологической интуицией. Классический способ изучения топологического пространства — перейти к его триангуляции, то есть разбить его на симплексы: отрезки, треугольники, тетраэдры...

Алгебраический аппарат этой техники — теория симплициальных множеств.

2.1.1. Определение. *Геометрическим n-мерным симплексом* называется топологическое пространство

$$\Delta_n=\left\{(x_0, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ \sum_{i=0}^{n}x_i=1,\ x_i\geqslant 0\right\}.$$

Точка e_i с $x_i=1$ называется его *i-й вершиной*. Каждому неубывающему отображению $f:[m]\to[n]$, где $[m]=\{0,\ldots,m\}$, отвечает отображение «f-я грань»:

Δ_f=линейное отображение $\Delta_m\to\Delta_n$, переводящее вершину $e_i\in\Delta_m$ в $e_{f(i)}\in\Delta_n$, $i=0,\ldots,m$. ■

2.1.2. Определение. *Симплициальным множеством* называется семейство множеств $X=(X_n)$, $n=0,1,\ldots$ и отображений $X(f):X_n\to X_m$, по одному для каждого неубывающего отображения $f:[m]\to[n]$, с условиями

$$X(\mathrm{id})=\mathrm{id},\ X(g\circ f)=X(f)\circ X(g).$$

Следует представлять себе X_n как множество индексов, которое нумерует семейство геометрических n-мерных симплексов. Отображения $X(f)$ описывают способ склейки всех этих симплексов в одно топологическое пространство.

Симплициальным отображением $\varphi:X\to Y$ называется семейство $\varphi_n:X_n\to Y_n$ такое что $Y(f)\varphi_n=\varphi_m X(f)$ для всех $f:[m]\to[n]$. ■

2.1.3. Определение. *Геометрической реализацией* симплициального множества X называется топологическое пространство

$$|X|=\coprod_{n=0}^{\infty}(\Delta_n\times X_n)/R,$$

где R — отношение эквивалентности: $(s,x)\in\Delta_n\times X_n$ склеивается с $(t,y)\in\Delta_m\times X_m$, если существует неубывающее отображение $f:[m]\to[n]$ с $y=X(f)x$, $s=\Delta_f(t)$. Топология на $|X|$ — слабейшая, в которой факторизация по R непрерывна. ■

2.2. Гомологии и когомологии симплициального множества. Пусть X — симплициальное множество. Обозначим через $C_n(X,\mathbf{Z})$ свободную абелеву группу, порожденную X_n, $C_n=0$ при $n<0$. Для любой абелевой группы F положим $C_n(X,F)=C_n(X,\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}F$. Таким образом, элементы $C_n(X,F)$ — цепи X с коэффициентами в F — суть формальные конечные линейные комбинации вида $\sum_{x\in X_n}a(x)x$, $a(x)\in F$. Граничный оператор определяется следующей формулой. Пусть $\partial_n^i:[n-1]\to[n]$ — единственное возрастающее отображение, в образе которого не содержится i. Положим $d_0=0$ и

$$d_n\left(\sum_{x\in X_n}a(x)x\right)=\sum_{x\in X_n}a(x)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X\left(\partial_n^i\right)(x),\quad n\geqslant 1.$$

Коцепи $C^n(X,F)$ задаются двойственным определением: $C^n(X,F)$=функции на X_n со значениями в F;

$$(d^nf)(x)=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i f\left(X\left(\partial_{n+1}^i\right)(x)\right).$$

Положим

$$H_n(X, F)=H_n(C.(X, F)), \quad H^n(X, F)=H^n(C^{\cdot}(X, F)).$$

2.3. Сингулярный комплекс. Пусть Y — топологическое пространство. *Сингулярным n-симплексом* Y называется непрерывное отображение $\varphi : \Delta_n \to Y$. Положим

$$X_n = \text{множество сингулярных } n\text{-симплексов } Y;$$

$$X(f)\varphi = \varphi \circ \Delta_f, \text{ где } f : [m] \to [n] \text{ не убывает, } \Delta_f : \Delta_m \to \Delta_n.$$

(Ко)гомологии Y с коэффициентами в абелевой группе F определяются как: $H_n(X, F)$ и $H^n(X, F)$, и обозначаются $H_n^{\text{sing}}(Y, F)$ и $H_{\text{sing}}^n(Y, F)$.

2.4. Системы коэффициентов. В определении n-цепи симплициального множества можно брать коэффициенты из своей группы для каждого симплекса, но тогда, чтобы ввести граничный оператор, следует потребовать их согласования в следующем смысле.

2.4.1. Определение. А. *Гомологической системой коэффициентов* $\mathscr{A}$ на симплициальном множестве X называется семейство абелевых групп $\{\mathscr{A}_x\}$, по одной для каждого симплекса $x \in X_n$, и семейство гомоморфизмов групп $\mathscr{A}(f, x) : \mathscr{A}_x \to \mathscr{A}_{X(f)x}$, по одному для каждой пары $(x \in X_n, f : [m] \to [n])$, с условиями

$$\mathscr{A}(\text{id}, x) = \text{id}; \quad \mathscr{A}(fg, x) = \mathscr{A}(g, X(f)x)\mathscr{A}(f, x).$$

Б. *Когомологической системой коэффициентов* $\mathscr{B}$ на X называется аналогичное семейство абелевых групп $\{\mathscr{B}_x\}$ и гомоморфизмов $\mathscr{B}(f, x) : \mathscr{B}_{X(f)x} \to \mathscr{B}_x$ с условиями

$$\mathscr{B}(\text{id}, x) = \text{id}; \quad \mathscr{B}(fg, x) = \mathscr{B}(f, x)\mathscr{B}(g, X(f)x). \blacksquare$$

2.5. Гомологии и когомологии с коэффициентами. В обозначениях п. 2.4 положим

$$C_n(X, \mathscr{A}) = \left\{ \sum_{x \in X_n} a(x)x \mid a(x) \in \mathscr{A}_x \right\},$$

$$d_n\left(\sum_{x \in X_n} a(x)x\right) = \sum_{x \in X_n} \sum_{i=0}^{n} \mathscr{A}(\partial_n^i, x)(a(x))(-1)^i X(\partial_n^i x), \quad n \geqslant 1,$$

и аналогично

$$C^n(X, \mathscr{B}) = \left\{ \text{функции } f : X_n \to \coprod_{x \in X_n} \mathscr{B}_x, \; f(x) \in \mathscr{B}_x \right\},$$

$$(d^n f)(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathscr{B}(\partial_{n+1}^i, x)\left(f\left(X(\partial_{n+1}^i)(x)\right)\right), \quad x \in X_{n+1}.$$

Если группы $\mathscr{A}_x$ (соответственно $\mathscr{B}_x$) не зависят от x, а все отображения $\mathscr{A}(f, x)$ (соответственно $\mathscr{B}(f, x)$) тождественны, получаем определения п. 2.2. (Ко)гомологии $C_{\cdot}(X, \mathscr{A})$ и $C^{\cdot}(X, \mathscr{B})$ называются (ко)гомологиями симплициального множества с системой коэффициентов.

2.6. Когомологии Чеха с коэффициентами в пучке. Пусть Y — топологическое пространство, $U=(U_\alpha)$ — его открытое или замкнутое покрытие, индекс α пробегает множество A. *Нервом* покрытия U называется симплициальное множество X:

$$X_n = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mid U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n} \neq \varnothing\} \subset A^{n+1};$$

$$X(f)(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_{f(0)}, \ldots, \alpha_{f(m)}), \quad f:[m] \to [n].$$

Пусть $\mathscr{F}$ — пучок абелевых групп на Y. Он определяет когомологическую систему коэффициентов на нерве Y:

$$\mathscr{F}_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n} = \Gamma(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}; \mathscr{F});$$

$\mathscr{F}(f, (\alpha_0, \ldots, \alpha_n))$ переводит сечение $\varphi \in \Gamma(U_{\alpha_{f(0)}} \cap \ldots \cap U_{\alpha_{f(n)}} \mathscr{F})$ в его ограничение на $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$.

Когомологии Y с этой системой коэффициентов называются когомологиями Чеха покрытия U с коэффициентами в пучке $\mathscr{F}$.

2.7. Когомологии групп. Пусть G — некоторая группа. Определим симплициальное множество BG:

$$(BG)_n = G^n;$$

$$\text{для } f:[m] \to [n]: \ BG(f)(g_1, \ldots, g_n) = (h_1, \ldots, h_m),$$

$$\text{где } h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j \ (=e, \text{ если } f(i-1) = f(i)).$$

Геометрическая реализация $|BG|$ называется *классифицирующим пространством* группы G.

Пусть A — левый G-модуль, то есть аддитивная группа, на которой G действует автоморфизмами. По нему строится следующая когомологическая система коэффициентов $\mathscr{B}$ на BG:

$$\mathscr{B}_x = A \text{ для всех } x;$$

$$\mathscr{B}(f, x)(a) = ha, \quad h = \prod_{j=1}^{f(0)} g_j \quad (=e, \text{ если } f(0)=0)$$

$$\text{для } f:[m] \to [n], \quad x = (g_1, \ldots, g_n) \in (BG)_n, \quad a \in A.$$

Пользуясь определениями, мы можем явно описать комплекс коцепей $C^{\cdot}(BG, \mathscr{B})$, обозначаемый также $C^{\cdot}(G, A)$:

$$C^0(G, A) = A;$$

$$C^n(G, A) = \text{функции на } G^n \text{ со значениями в } A.$$

Далее, для n-коцепи f:

$$df(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n).$$

Когомологии этого комплекса обозначаются $H^n(G, A)$. Аналогично, по A можно построить гомологическую систему коэффициентов на BG:

$$\mathcal{A}_x = A \text{ для всех } x;$$
$$\mathcal{A}(f, x)\, a = h^{-1} a, \quad h = \prod_{j=1}^{f(0)} g_j,$$

что приводит к гомологиям $H_n(G, A)$.

2.8. Комплекс де Рама. В предыдущих примерах переход от геометрии к алгебре совершался через посредство комбинаторики и симплициального разбиения. Если топологическое пространство Y снабжено структурой дифференцируемого многообразия, то кольцо гладких дифференциальных форм на нем является комплексом. Точнее, пусть $\Omega^i(Y)$ — пространство i-форм. Внешний дифференциал в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ задается формулой

$$d\left(\sum_{|I|=k} f_I dx^I\right) = \sum_{|I|=k} \sum_i \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I,$$
$$I = (i_1, \ldots, i_k), \quad |I| = i_1 + \ldots + i_k, \quad dx^I = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Когомологии комплекса $(\Omega^{\cdot}(X), d)$ называются когомологиями де Рама многообразия X и обозначаются $H^{\cdot}_{DR}(X)$.

Теорема де Рама устанавливает канонический изоморфизм

$$H^{\cdot}_{DR}(X) = H^{\cdot}_{\text{sing}}(X, \mathbf{R})$$

На уровне цепей этот изоморфизм ставит в соответствие дифференциальной i-форме ее интеграл по i-мерным гладким сингулярным цепям.

2.9. Когомологии алгебры Ли. Рассмотрим комплекс де Рама связной группы Ли G. На нем действует правыми сдвигами группа G. Обозначим через $\Omega_{\text{inv}}(G)$ подкомплекс, состоящий из G-инвариантных форм. Он допускает чисто алгебраическую конструкцию. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли G, реализованная как пространство правоинвариантных векторных полей на G. Тогда $\Omega^n_{\text{inv}}(G) = L(\Lambda^n \mathfrak{g}, \mathbf{R})$ пространство кососимметричных n-линейных форм вещественных форм на $\mathfrak{g}$. Внешний дифференциал от n-форм, рассматриваемый как полилинейная функция на векторных полях (произвольного гладкого многообразия) определяется формулой Картана:

$$(d\omega^n)(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n+1} (-1)^{j+l-1} \omega^n([\xi_j, \xi_l], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \hat{\xi}_l, \ldots, \xi_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \xi_j [\omega^n(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_{n+1})].$$

(здесь $\wedge$ означает, что соответствующий член опущен).

Применяя ее к $\Omega^n_{\mathrm{inv}}(G)$, получаем формулу для d на $C^\cdot(\mathfrak{g}) = L(\Lambda^\cdot\mathfrak{g}, \mathbf{R})$:

$$dc(g_1, \ldots, g_{n+1}) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, \hat{g}_l, \ldots, g_{n+1}).$$

Когомологии этого комплекса обозначаются $H^\cdot(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$. Объединяя теорему де Рама с операцией усреднения по компактной группе, получаем теорему Картана: если G компактна и связна, то

$$H^\cdot_{\mathrm{sing}}(G, \mathbf{R}) = H^n(\mathfrak{g}, \mathbf{R}).$$

Конструкция $C^\cdot(\mathfrak{g})$ совершенно не требует существования группы Ли, ассоциированной с $\mathfrak{g}$, и применима к любым абстрактным алгебрам Ли над полем k.

Более общо, пусть M — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Положим $C^n(\mathfrak{g}, M) = L_k(\Lambda^n\mathfrak{g}, M)$ и определим дифференциал формулой Картана:

$$dc(g_1, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots$$
$$\ldots, \hat{g}_l, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j g_j c(g_1, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_{n+1})$$

Когомологии этого комплекса обозначаются $H^n(\mathfrak{g}, M)$.

Гомологии $H_\cdot(\mathfrak{g}, M)$ определяются как гомологии комплекса $C_\cdot(\mathfrak{g}, M) = M \otimes \Lambda^\cdot\mathfrak{g}$ с дифференциалом

$$d(m \otimes (g_1 \wedge \ldots \wedge g_n)) = \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n} (-1)^{j+l-1} m \otimes ([g_j, g_l] \wedge g_1 \ldots \wedge \hat{g}_j \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \hat{g}_l \wedge \ldots g_n) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} g_j m \otimes (g_1 \wedge \ldots \wedge \hat{g}_j \wedge \ldots \wedge g_n).$$

2.10. Комплекс Хохшильда. Пусть k — коммутативное кольцо с единицей, A — ассоциативная k-алгебра с единицей.

Рассмотрим цепной комплекс $T_\cdot(A)$:

$$T_n(A) = \overbrace{A \underset{k}{\otimes} \ldots \underset{k}{\otimes} A}^{n+2}, \quad n \geqslant -1,$$

$$d(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1})=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes(a_i a_{i+1})\otimes\ldots\otimes a_{n+1}.$$

Его можно рассматривать как комплекс k-модулей; как комплекс A-бимодулей; наконец, как комплекс левых A^e-модулей, где $A^e=A\underset{k}{\oplus}A^t$, A^t — кольцо A с умножением в противоположном порядке. Этот комплекс ацикличен, ибо его тождественное отображение гомотопно нулевому: гомотопия имеет вид

$$a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}\mapsto 1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}.$$

Пусть M — некоторый A-бимодуль. Тогда определены комплексы k-модулей $M\underset{A^e}{\otimes}T_{\bullet}(A)$ и $\mathrm{Hom}_{A^e}(T_{\bullet}(A), M)$. Их гомологии обозначаются соответственно $H_n(A, M)$ и $H^n(A, M)$ и называются (ко)гомологиями Хохшильда алгебры A с коэффициентами в M. Тензорное умножение над A^e можно устранить с помощью изоморфизма

$$M\underset{A^e}{\otimes}T_n(A)=M\underset{A^e}{\otimes}A^e\underset{k}{\otimes}T_{n-2}(A)=M\underset{k}{\otimes}T_{n-2}(A).$$

В этой записи $H_n(A, M)$ становятся когомологиями следующего комплекса $C_{\bullet}(A, M)$:

n-й член: $M\otimes A^{\otimes n}$;

$$d(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=ma_1\otimes a_2\otimes\ldots\otimes a_n+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n+(-1)^n a_n m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}.$$

Аналогично, $H^n(A, M)$ являются когомологиями комплекса $C^{\bullet}(A, M)$:

n-й член: $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$;

$$df(a_1,\ldots, a_{n+1})=a_1 f(a_2,\ldots, a_{n+1})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(a_1,\ldots, a_i a_{i+1},\ldots, a_{n+1})+(-1)^{n+1}f(a_1,\ldots, a_n)a_{n+1}.$$

2.11. Циклические гомологии алгебр. Положим в конструкциях предыдущего пункта $k\supset\mathbf{Q}, M=A$. На членах комплекса $C_n(A, A)$, определяющего $H_n(A, A)$, действуют циклические группы перестановок. Положим

$$t(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=(-1)^n a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1}.$$

Оператор t не коммутирует с дифференциалом. Однако, если положить

$$d'(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n,$$

то справедлива формула

$$d(1-t)=(1-t)d'.$$

Следовательно, образ $1-t$ есть подкомплекс $C_n(A, A)$, и определен факторкомплекс

$$C_n^\lambda(A)=C_n(A, A)/\operatorname{Im}(1-t),$$

$$d^\lambda=d \bmod \operatorname{Im}(1-t).$$

Его гомологии называются циклическими гомологиями алгебры A и обозначаются $H_n^\lambda(A)$ или $HC_n(A)$.

2.12. Циклические когомологии алгебр. Чтобы определить их, следует взять подкомплекс $C_\lambda^\cdot(A)\subset C^\cdot(A, A^*)$, состоящий из t-инвариантных коцепей, то есть k-линейных функционалов $f: A^{\otimes n}\to A^*$ со свойством

$$f(a_0\otimes \ldots \otimes a_n)=(-1)^n f(a_n\otimes a_0\otimes \ldots \otimes a_{n-1}).$$

Граничный оператор задается последней формулой в п. 2.9. Когомологии обозначаются $H^n{}_\lambda(A)$ или $HC^n(A)$.

2.13. Комплекс (ко)цепей клеточного разбиения. Вычисление (ко)гомологий топологического пространства X с помощью комплекса сингулярных (ко)цепей неэкономно из-за бесконечномерности этого комплекса. В топологии часто используются (ко)цепи, связанные с реализацией X в виде клеточного разбиения. Приведем основные определения.

Клеточным разбиением (или CW-комплексом) называется топологическое пространство X, представленное в виде объединения $X=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{i\in I_n} e_i^n$ попарно непересекающихся множеств e_i^n (клеток), для каждой из которой зафиксировано отображение $f_i^n: B^n\to X$ замкнутого шара B^n в X, такое, что ограничение f_i^n на внутренность шара $\operatorname{Int} B^n$ представляет собой гомеоморфизм $f_i^n: \operatorname{Int} B^n \xrightarrow{\sim} e_i^n$. При этом должны выполняться следующие аксиомы:

а) граница каждой клетки $\dot{e}_i^n=\bar{e}_i^n\setminus e_i^n$ содержится в объединении конечного числа клеток меньшей размерности.

б) Множество $Y\subset X$ замкнуто в том и только том случае, если для всех n и всех $i\in I_n$ полный прообраз $(f_n^i)^{-1}(Y\cap \bar{e}_i^n)$ замкнут в $\bar{e}_i^n$.

Для пары клеток e_i^n, e_j^{n-1} определим *коэффициент инцидентности* $c(e_i^n, e_j^{n-1})$ следующим образом. Пусть X^r — объединение всех клеток размерности $\leqslant r$. Тогда X^{n-1}/X^{n-2} (X^{n-2} стянуто в точку в X^{n-1}) есть букет $(n-1)$-мерных сфер S^{n-1} в числе, равном мощности I_{n-1}, и клетка e_j^{n-1} фиксирует одну сферу этого букета (обозначим ее через S). Рассмотрим композицию

$$S^{n-1}=\dot{B}^n\xrightarrow{f_i^n/S^{n-1}}X^{n-1}\to X^{n-1}/X^{n-2}\xrightarrow{\pi} S,$$

где π — отображение проектирования букета сфер на одну из компонент. Полученное отображение $S^{n-1} \to B^n \dot{=} S^{n-1}$ задает элемент группы $\pi_{q-1}(S^{n-1}) = \mathbf{Z}$, то есть определяет целое число — степень этого отображения — и мы положим $c(e_i^n, e_j^{n-1})$ равным этому числу.

Теперь определим группу целочисленных n-мерных цепей как свободную абелеву группу, порожденную e_i^n, $i \in I_n$ и зададим дифференциал формулой

$$de_i^n = \sum_{j \in I_{n-1}} c(e_i^n, e_j^{n-1}) e_j^{n-1}.$$

Ввиду аксиомы а), эта сумма конечна.

Коцепи, цепи и коцепи с коэффициентами определяются аналогично.

2.13.1. Т е о р е м а. (Ко)гомологии клеточного разбиения, вычисленные с помощью клеточных (ко)цепей, канонически изоморфны сингулярным (ко)гомологиям.

§ 3. Спектральная последовательность

3.1. Определение спектральной последовательности. Наряду с точной последовательностью когомологий (теорема п. 1.5.1), спектральная последовательность является одним из наиболее мощных вычислительных средств гомологической алгебры.

Спектральная последовательность абелевых групп — это семейство абелевых групп $E = \{E_r^{p,q}, E^n\}$, где $r \geqslant 1$, p, q, $n \in \mathbf{Z}$, и некоторое семейство гомоморфизмов между ними со свойствами, которые мы сейчас опишем.

Но прежде скажем несколько слов о том, как удобно представлять себе запись всей этой информации.

Читатель может вообразить стопку листов в клеточку; клетки перенумерованы парами $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$. Объект $E_r^{p,q}$ помещен в (p, q)-й клетке на r-м листе. Объекты E^n размещены на последнем, «трансфинитном» листе и занимают всю диагональ $p+q=n$.

Теперь опишем гомоморфизмы и условия на них.

а) На r-м листе заданы морфизмы $d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q-r+1}$. При $r=1$ они действуют из клетки в ее правую соседнюю. При $r=2$ они действуют вправо вниз ходом коня. При $r \geqslant 3$ получается обобщенный ход коня.

Условие: $d_r^2 = 0$; точнее, $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ для всех p, q, r.

Поэтому по $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ можно построить группы когомологий r-го листа:

$$H^{p,q}(E_r) = \operatorname{Ker} d_r^{p,q} / \operatorname{Im} d_r^{p-r, q+r-1}.$$

Следующий набор данных входит в определение E:

б) Изоморфизмы $\alpha_r^{p,q}: H^{p,q}(E_r) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{p,q}$.

Часто удобно считать, что на $(r+1)$-м листе стоят просто когомологии r-го листа, и $\alpha_r^{p,q}$ тождественны.

Основное условие на изоморфизмы $\alpha_r^{p,q}$ состоит в существовании предельных групп $E_\infty^{p,q}$. Простейшее требование, обычно выполненное в приложениях, таково:

в) для каждой пары (p, q) существует такое r_0, что $d_r^{p,q}=0$, $d_r^{p-r,q+r-1}=0$ при $r \geqslant r_0$.

Тогда $\alpha_r^{p,q}$ отождествляет все $E_r^{p,q}$ при $r \geqslant r_0$, и мы обозначаем эту группу через $E_\infty^{p,q}$.

К этому моменту на трансфинитном листе ($r=\infty$) размещены группы $E_\infty^{p,q}$ и группы E^n вдоль диагонали $p+q=n$. Последний набор данных устанавливает связь между ними:

г) на каждой E^n задана убывающая *регулярная фильтрация* $\ldots \supset F^pE^n \supset F^{p+1}E^n \supset \ldots$ (то есть $\bigcap_p F^pE^n=\{0\}$, $\bigcup_p F^pE^n=E^n$) и изоморфизмы $\beta^{p,q}: E_\infty^{p,q} \to F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$.

В этих условиях говорят, что последовательность $(E_r^{p,q})$ *сходится* к (E^n), или что (E^n) является *пределом* $(E_r^{p,q})$.

Еще раз подчеркнем, что компонентами одной спектральной последовательности E считаются все группы $(E_r^{p,q}, E^n)$, все гомоморфизмы $(d_r^{p,q}, \alpha_r^{p,q}, \beta^{p,q})$ и фильтрации на E^n.

Морфизм спектральных последовательностей $f: E \to E'$ состоит из гомоморфизмов $f_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r'^{p,q}$, $f^n: E^n \to E'^n$, перестановочных со структурными гомоморфизмами и совместимых с фильтрациями.

3.2. Замечания. а) Работая с комплексами, ограниченными с одной стороны, мы обычно приходим к спектральным последовательностям, ненулевые члены которых расположены в одном квадранте (то есть в области вида, скажем, $p \geqslant p_0$, $q \geqslant q_0$).

Пусть $E_r^{p,q}$ отличны от нуля только в I-м или III-м квадранте. Тогда условие 3в) выполнено автоматически, потому что либо начало, либо конец стрелок $d_r^{p,q}$, $d_r^{p-r,q+r-1}$ при $r > r_0(p, q)$ выходит за пределы этих квадрантов. Кроме того, фильтрации на E^n автоматически конечны: $F^pE^n=\{0\}$ при $p < p_-(n)$, $F^pE^n=E^n$ при $p > p_+(n)$.

б) Спектральные последовательности тем приятнее в вычислительном отношении, чем большее количество объектов $E_r^{p,q}$ и морфизмов $d_r^{p,q}$ равны нулю. Один специальный случай имеет название: E вырождена в члене E_r, если $d_{r'}^{p,q}=0$ при $r' \geqslant r$ для всех p, q. Тогда $E_\infty^{p,q}=E_r^{p,q}$.

в) Обычные задачи, решаемые с помощью спектральной последовательности, — получение информации о E^n по известным $E_1^{p,q}$ или $E_2^{p,q}$.

Покажем, например, что инварианты типа эйлеровой характеристики можно вычислять точно, даже не зная ничего о дифференциалах $d_r^{p,q}$. Пусть C — фиксированная абелева группа, χ — отображение, сопоставляющее каждой абелевой группе A элемент $\chi(A)\in C$. Предположим, что $\chi(A)=\chi(A')$, если A изоморфно A', и χ аддитивно, то есть $\chi(A)=\chi(B)+\chi(A/B)$ для любой группы A и ее подгруппы B. Для конечного комплекса $K^\cdot$ положим $\chi(K^\cdot)=\sum\limits_i(-1)^i\chi(K^i)$. Теорема Эйлера утверждает, что $\chi(K^\cdot)=\sum\limits_i(-1)^i\chi(H(K^i))$.

Пусть теперь E — спектральная последовательность. Рассмотрим комплексы $(E_r^\cdot, d_r^\cdot)$, где $E_r^n=\bigoplus\limits_{p+q=n}E_r^{p,q}$, $d_r^n=\bigoplus\limits_{p+q=n}d_r^{p,q}$. Предположим, что и прямые суммы, и комплексы $E_{r_0}^\cdot$ конечны для некоторого r_0. Тогда то же верно для всех $r\geqslant r_0$ и легко проверить, что $\sum\limits_n(-1)^n\chi(E^n)=\chi(E_r^\cdot)$.

3.3. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Пусть $K^\cdot$ — комплекс и пусть задана убывающая *фильтрация* $K^\cdot$ подкомплексами $F^pK^\cdot$. Это значит, что в K^n заданы подгруппы... $\supset F^pK^n\supset F^{p+1}K^n\supset\ldots$ и $d^n(F^pK^n)\subset F^pK^{n+1}$.

Укажем сразу два полезных примера фильтрации. Положим:

$$(F^pK^\cdot)^n=\tau_{\leqslant -p}(K^\cdot)^n=\begin{cases}K^n & \text{при } n<-p,\\ \operatorname{Ker} d^{-p} & \text{при } n=-p,\\ 0 & \text{при } n>-p.\end{cases}$$

Эта фильтрация называется *канонической*. Она убивает группы когомологий $K^\cdot$ по очереди

$$H^n(F^pK^\cdot)=\begin{cases}H^n(K^\cdot) & \text{при } n\leqslant -p,\\ 0 & \text{при } n>-p.\end{cases}$$

Положим далее

$$(\widetilde{F}^pK^\cdot)^n=\sigma_{\geqslant p}(K^\cdot)^n=\begin{cases}0 & \text{при } n<p,\\ K^n & \text{при } n\geqslant p.\end{cases}$$

Эта фильтрация называется «*глупой*»: она тоже убивает группы когомологий $K^\cdot$ по очереди, но при этом портит граничную группу:

$$H^n(\widetilde{F}^pK^\cdot)=\begin{cases}0 & \text{при } n<p,\\ \operatorname{Ker} d^p & \text{при } n=p,\\ H^n(K^\cdot) & \text{при } n>p.\end{cases}$$

Построим теперь по фильтрованному комплексу спектральную последовательность.

а) *Конструкция* $E_r^{p,q}$ *и* $d_r^{p,q}$. Положим

$$Z_r^{p,q} = d^{-1}(F^{p+r}K^{p+q+1}) \cap F^pK^{p+q}.$$

Эта группа «мажорирует сверху» циклы в K^{p+q}, лежащие в p-й фильтровочной подгруппе: дифференциал d не обязательно переводит их в нуль, но углубляет фильтрационный номер на r.

В $Z_r^{p,q}$ есть тривиальная часть, являющаяся суммой двух подгрупп:

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} = d^{-1}(F^{p+1}K^{p+q+1}) \cap F^{p+1}K^{p+q},$$

$$dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} = d(F^{p-r+1}K^{p+q-1}) \cap F^pK^{p+q}.$$

Положим

$$E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}).$$

Легко проверить, что d индуцирует дифференциалы

$$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+q,q-r+1}.$$

б) *Конструкция* $\alpha_r^{p,q}$. Для построения $\alpha_r^{p,q}$ следует построить гомоморфизмы

$$(Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) \to Z(E_r^{p,q}),$$

$$(dZ_r^{p-r,q+r-1} + Z_{r-1}^{p+1,q-1})/(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) \to B(E_r^{p,q})$$

(справа стоят циклы и границы d_r) и показать, что они являются изоморфизмами. Это сводится к несложным, но довольно громоздким проверкам.

в) *Конструкция* E^n. Положим $E^n = H^n(K^\cdot)$ и

$$F^pE^n = \text{образ } H^n(F^pK^\cdot)$$

при естественном отображении $F^pK^\cdot \to K^\cdot$.

3.3.1. Теорема. Предположим, что на каждом K^n фильтрация конечна и регулярна. Тогда построенная спектральная последовательность $(E_r^{p,q})$ сходится к (E^n). ■

3.4. Примеры спектральных последовательностей. Здесь мы опишем спектральные последовательности, связанные с глупой и канонической фильтрациями комплекса (см. начало п. 3).

а) *Глупая фильтрация* $\tilde{F}^pK^\cdot$. Имеем:

$$Z_r^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{при } q<0, \\ \operatorname{Ker} d^{p+q} & \text{при } q \geqslant 0,\ r<q+1, \\ K^{p+q} & \text{при } q\geqslant 0,\ r \geqslant q+1. \end{cases}$$

$$E_r^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq 0, \\ K^p & \text{при } q=0,\ r=1, \\ H^p(K^\cdot) & \text{при } q=0,\ r\geqslant 2 \text{ и при } q=0,\ r=\infty. \end{cases}$$

Дифференциал $d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ совпадает с $d^p: K^p \to K^{p+1}$ при $q=0$, $r=1$ и тривиалĕн в остальных случаях.

$$E^n = H^n(K^{\cdot}); \quad \text{фильтрация на } E^n \text{ тривиальна:}$$

$$F^p E^n = \begin{cases} E^n & \text{при } p \leqslant n, \\ 0 & \text{при } p > n. \end{cases}$$

б) *Каноническая фильтрация.* Имеем

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} H^p(K^{\cdot}) & \text{при } q = -2p, \\ 0 & \text{при } q \neq -2p, \end{cases}$$

$$d_1^{p,q} = 0 \text{ при всех } p, q.$$

Отсюда $E_r^{p,q} = E_1^{p,q}$ и $d_r = 0$ для всех $r \geqslant 2$. Далее, $E^n = H^n(K^{\cdot})$; фильтрация на E^n тривиальна:

$$F^p E^n = \begin{cases} E^n & \text{при } n \leqslant -p, \\ 0 & \text{при } n > -p. \end{cases}$$

3.5. Спектральная последовательность двойного комплекса. *Двойной комплекс* $L = (L^{ij}, d_{\mathrm{I}}^{ij}, d_{\mathrm{II}}^{ij})$ — это набор абелевых групп L^{ij} и гомоморфизмов $d_{\mathrm{I}}^{ij}: L^{ij} \to L^{i+1,j}$, $d_{\mathrm{II}}^{ij}: L^{ij} \to L^{i,j+1}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(d_{\mathrm{I}})^2 = 0, \quad (d_{\mathrm{II}})^2 = 0, \quad d_{\mathrm{I}} d_{\mathrm{II}} + d_{\mathrm{II}} d_{\mathrm{I}} = 0. \tag{1}$$

Положим $(SL)^n = \bigoplus_{i+j=n} L^{ij}$ (во всех встречающихся у нас случаях L сосредоточен в квадранте, и эти прямые суммы конечны). Условия (1) означают, что оператор

$$d = d_{\mathrm{I}} + d_{\mathrm{II}}: (SL)^n \to (SL)^{n+1}$$

удовлетворяет равенству $d^2 = 0$, так что $((SL)^{\cdot}, d)$ есть комплекс, называемый *диагональным комплексом.*

Морфизмы двойных комплексов определяются очевидным образом. Пусть $H_{\mathrm{I}}^{ij}(L)$ — когомологии обычного комплекса $L^{\cdot, j}$ с дифференциалом $d_{\mathrm{I}}^{\cdot, j}$. Ясно, что дифференциал d_{II}^{ij} индуцирует морфизмы $H_{\mathrm{I}}^{ij}(L) \to H_{\mathrm{I}}^{i,j+1}(L)$, определяющие комплексы $H_{\mathrm{I}}^{i,\cdot}(L)$. Будем обозначать когомологии этого комплекса через $H_{\mathrm{II}}^{j} H_{\mathrm{I}}^{i}(L)$. Аналогично определяются когомологии $H_{\mathrm{I}}^{i} H_{\mathrm{II}}^{j}(L)$.

3.5.1. Предложение. Пусть L сосредоточен в первом квадранте (то есть $L^{ij} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$). Тогда существуют две спектральные последовательности ${}^{\mathrm{I}}E$ и ${}^{\mathrm{II}}E$, сходящиеся к общему пределу $\{H^n(SL)\}$, члены E_2 которых имеют вид

$$^{\mathrm{I}}E_2^{pq}=H_{\mathrm{I}}^pH_{\mathrm{II}}^q(L),\quad {}^{\mathrm{II}}E_2^{pq}=H_{\mathrm{II}}^pH_{\mathrm{I}}^q(L).$$

3.6. Спектральная последовательность Серра—Хохшильда. Пусть G — группа, $H\subset G$ — нормальный делитель, A — некоторый G-модуль. Тогда G/H действует на когомологиях $H^q(H, A)$. *Спектральная последовательность Серра—Хохшильда* имеет $E_2^{pq}=H^p(G/H,\ H^q(H, A))$ и сходится к $E^n=H^n(G, A)$.

3.7. Спектральная последовательность расслоения. Пусть $p: E\to B$ — морфизм топологических пространств, являющийся расслоением в смысле Серра. Предположим, что база B связна и односвязна. Пусть F — слой расслоения p. Тогда существует спектральная последовательность (называемая *спектральной последовательностью Серра*) с

$$E_2^{pq}=H^p(B,\ H^q(F))$$

(когомологии B с коэффициентами в локальной системе $H^q(F)$), сходящаяся к $H^n(E)$.

Ниже (см. гл. 2, п. 4.5.2) будет описан один общий способ построения спектральных последовательностей, частными случаями которого являются два изложенных выше примера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В этой главе приведены результаты, составляющие часть классической гомологической алгебры, как она понималась в начале 60-х годов; дальнейшее развитие изложенных здесь идей можно найти в любом классическом учебнике [40], [87], [107]. Точная последовательность когомологий (теорема п. 1.5.1) и спектральная последовательность фильтрованного комплекса (теорема п. 3.3.1) являются основными вычислительными средствами гомологической алгебры. Точная последовательность (в топологической ситуации) была известна еще Пуанкаре; спектральная последовательность впервые появилась, по-видимому, у Лерэ. Доказательство теоремы п. 1.5.1. см. в [40] или [8]. Спектральным последовательностям посвящена обширная литература; наиболее подробно общая схема и многочисленные примеры использования спектральных последовательностей (в основном, топологические) изложены в монографии [116]. Доказательство теоремы п. 3.3.1 и ее обобщений см., например, в [40]. О спектральной последовательности Линдона—Серра—Хохшильда из п. 3.6 см. [34]. Одним из лучших изложений спектральной последовательности Серра остается оригинальная статья Серра [130]; см. также [16].

Каждая из тем, изложенных в § 2, представляет собой начало одного из применений гомологической алгебры к соответствующей области математики; более подробно эти применения изложены в соответствующих параграфах главы 3 и в гл. 4, § 5. Относительно симплициальных множеств и их применений в топологии см. [64], [65]. Доказательство теоремы п. 2.12.1 см., например, в [57].

Глава 2

ЯЗЫК КАТЕГОРИЙ

§ 1. Категории и функторы

1.1. Определение. *Категория* $\mathscr{C}$ — это набор следующих данных.

а. Класс $Ob\mathscr{C}$, элементы которого называются объектами.

б. Набор множеств $\mathrm{Hom}(X, Y)$, по одному для каждой упо-
вие морфизм, обозначаемый $\psi\circ\varphi$ или $\psi\varphi : X\to Z$ и называемый
морфизмами (из X в Y) и обозначаются $\varphi : X\to Y$.

в. Набор отображений

$$\mathrm{Hom}(X, Y)\times\mathrm{Hom}(Y, Z)\to\mathrm{Hom}(X, Z),$$

по одному для каждой упорядоченной тройки объектов X, Y, Z. Паре $\varphi : X\to Y$, $\psi : Y\to Z$ такое отображение ставит в соответствие морфизм, обозначаемый $\psi\circ\varphi$ или $\psi\varphi : X\to Z$ называемый *композицией* φ и ψ.

Эти данные должны удовлетворять следующим аксиомам.

А. По каждому морфизму φ однозначно определяются такие $X, Y\in Ob\mathscr{C}$, что $\varphi\in\mathrm{Hom}(X, Y)$. Иными словами, множества $\mathrm{Hom}(X, Y)$ попарно не пересекаются.

Б. Для каждого объекта $X\in Ob\mathscr{C}$ существует тождественный морфизм, обозначаемый $\mathrm{id}_X : X\to X$ и однозначно определяемый тем свойством, что $\mathrm{id}_X\circ\varphi=\varphi$, $\psi\circ\mathrm{id}_X=\mathrm{id}_X$ всякий раз, когда эти композиции определены.

В. Композиция морфизмов ассоциативна:

$$(\chi\psi)\varphi=\chi(\psi\varphi)$$

для любых $\varphi : X\to Y$, $\psi : Y\to Z$, $\chi : Z\to U$.

Вместо $X\in Ob\mathscr{C}$ мы будем также писать $X\in\mathscr{C}$, $\bigcup\limits_{X,Y\in Ob\mathscr{C}}\mathrm{Hom}(X, Y)$ иногда обозначается $Mor\,\mathscr{C}$.

1.2. Примеры категорий. а. Важный класс категорий составляют множества, снабженные дополнительной структурой, с отображениями, которые с этой структурой согласованы. Примеры:

$\mathscr{S}et$: категория множеств и отображений между ними;

$\mathscr{T}op$: категория топологических пространств и непрерывных отображений;

$\mathscr{D}iff$: категория бесконечно дифференцируемых многообразий;

$\mathscr{A}b$: категория абелевых групп и их гомоморфизмов;

A-mod : категория левых модулей над фиксированным кольцом A;

$\mathscr{G}r$: категория групп и их гомоморфизмов.

б. *Категория* $\Delta: \mathrm{Ob}\Delta = \{[n] \mid n = \{0, 1, \ldots, n\}\}$; $\mathrm{Hom}_\Delta([m], [n])$ — множество неубывающих отображений $\{0, \ldots, m\}$ в $\{0, \ldots, n\}$.

Категория симплициальных множеств $\Delta^0\mathcal{S}et: \mathrm{Ob}\Delta^0(\mathcal{S}et) =$ $= \{$симплициальные множества$\}$; $\mathrm{Hom}(X, Y) = \{$симплициальные отображения X в $Y\}$.

Категория симплициальных объектов $\Delta^0\mathscr{C}$, где $\mathscr{C}$ — абстрактная категория. Читателю предлагается определить ее самостоятельно.

в. *Категория комплексов абелевых групп* $\mathrm{Kom}(\mathscr{A}b)$:

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathscr{A}b) = \{\text{коцепные комплексы } K^\cdot \text{ абелевых групп}\}$$
$$\mathrm{Hom}(K^\cdot, L^\cdot) = \{\text{морфизмы комплексов } K^\cdot \to L^\cdot\}.$$

г. Некоторые классические виды структур также удобно рассматривать как категории.

Категория частично упорядоченного множества. Пусть I — частично упорядоченное множество. Зададим категорию $\mathscr{C}(I)$ так: $\mathrm{Ob}\mathscr{C}(I) = I$; $\mathrm{Hom}(i, j)$ состоит из одного элемента, если $i \leqslant j$, пусто в противном случае. Композиция морфизмов и тождественный морфизм определяются единственно возможным способом.

Важным частным случаем $\mathscr{C}(I)$ является

Категория $\mathscr{T}op\,X$. Пусть X — топологическое пространство. Положим

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{T}op(X) = \{\text{открытые подмножества } U \subset X\}$$
$$\mathrm{Hom}(U, V) = \text{естественное вложение } U \to V, \text{ если}$$
$$U \subset V; \text{ пусто, если } U \not\subset V.$$

1.3. Определение. *Функтор* F из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ (обозначение $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$) состоит из следующих данных:

а. Отображение $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}: X \to F(X)$.

б. Отображение $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathscr{D}$, $\varphi \to F(\varphi)$, такое, что $\varphi: X \to$ $\to Y$ переходит в $F(\varphi): F(X) \to F(Y)$.

Эти данные должны быть подчинены следующему условию: $F(\psi\varphi) = F(\psi)F(\varphi)$ для всех $\varphi, \psi \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$, для которых $\psi\varphi$ определен (в частности, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$).

1.4. Примеры функторов.

а) Геометрическая реализация:

$$|\cdot|: \Delta^0\mathcal{S}et \to \mathscr{T}op.$$

Значение этого функтора на объектах $\Delta^0\mathcal{S}et$ определено в 1.2, 1.3, а на морфизмах определяется очевидным образом.

б) *Сингулярное симплициальное множество*:

$$\mathrm{Sing}: \mathscr{T}op \to \Delta^0\mathcal{S}et$$

$$(\mathrm{Sing}\,Y)_n = \text{множество сингулярных } n\text{-симплексов } Y,$$

(см. гл. 1, п. 2.7).

$$(\mathrm{Sing}\, Y)(f)(\varphi) = \varphi \circ \Delta_f, \text{ где } f: [m] \mapsto [n],\ \Delta_f: \Delta_m \to \Delta_n.$$

Значение Sing на морфизме (непрерывном отображении) $a: Y \to Y'$ определяется с помощью композиции: $\mathrm{Sing}(a)$ переводит сингулярный симплекс $\varphi: \Delta_n \to Y$ в сингулярный симплекс $a \circ \varphi: \Delta_n \to Y'$.

в) *n-я группа когомологий:*

$$H^n: \mathrm{Kom}\, \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b;$$

г) *классифицирующее пространство:*

$$B: \mathcal{G}r \to \Delta^0 \mathcal{S}et.$$

Определение B дано в гл. 1, п. 2.7.

1.5. Замечания.

а) Понятие функтора возникло как формализация того, что в старину называли «естественными конструкциями», и примеры из пп. 1.3, 1.4 дают образцы таких конструкций.

б) Те функторы $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, которые мы определили в п. 3.3, иногда называют *ковариантными функторами*, и определяют *контравариантный функтор* G как пару отображений $G: \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ с условием, что G переводит $\varphi: X \to Y$ в $G(\varphi): G(Y) \to G(X)$ и $G(\varphi\psi) = G(\psi)G(\varphi)$. Сейчас общепринято относить это «обращение стрелок» к исходной категории $\mathcal{C}$.

Формально определим *двойственную категорию* $\mathcal{C}^0$ следующим образом: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^0 = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ (но $X \in C$ как объект $\mathcal{C}^0$ будем обозначать X^0); $\mathrm{Hom}_C(X^0, Y^0) = \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ (морфизму $\varphi: X \to Y$ отвечает $\varphi^0: Y^0 \to X^0$); наконец, $\psi^0\varphi^0 = (\varphi\psi)^0$, $\mathrm{id}_{X^0} = (\mathrm{id}_X)^0$.

«Контравариантный» функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ определяется после этого как (ковариантный) функтор $G: \mathcal{C}^0 \to \mathcal{D}$.

Обозначение $\Delta^0\mathcal{S}et$, введенное в п. 2, напоминает о том, что каждое симплициальное множество X можно рассматривать как функтор $\tilde{X}: \Delta^0 \to \mathcal{S}et$:

$$\tilde{X}([n]) = X_n, \quad \tilde{X}(f) = X(f).$$

в) Функтор Hom_C естественно рассматривать как зависящий одновременно от двух аргументов. Вместо того, чтобы формально вводить соответствующее определение, сейчас принято пользоваться конструкцией *прямого произведения категорий.*

Пусть, скажем, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — две категории. Положим

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}',$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}((X, X'), (Y, Y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y'),$$

$$(\varphi, \varphi') \circ (\psi, \psi') = (\varphi \circ \psi, \varphi' \circ \psi'),$$

$$\mathrm{id}_{(X, X')} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_{X'}).$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ есть категория. Аналогично определяется произведение любого семейства категорий $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$.

Функтор от нескольких аргументов, по определению, есть функтор на соответствующем произведении категорий. Пример:

г) *Теоретико-множественная композиция функторов* $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D} \xrightarrow{G} \mathscr{E}$ есть функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{GF} \mathscr{E}$. Тождественное отображение $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathrm{Ob}\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\mathscr{C}$, $\mathrm{Mor}\mathscr{C} \to \mathrm{Mor}\mathscr{C}$ есть функтор. Это позволяет рассматривать любое множество категорий как категорию, с функторами в качестве морфизмов.

1.6. Еще примеры функторов.

а) *Предпучок множеств* (абелевых групп, ...) на топологическом пространстве X есть функтор

$$\mathscr{F} : (\mathscr{T}op\, X)^0 \to \mathscr{S}et\ X\ (\mathscr{A}b, \ldots)$$

(категория $\mathscr{T}op\, X$ определена в п. 1.2 г).

б) Пусть I — частично упорядоченное множество, $\mathscr{C}(I)$ — соответствующая категория, определенная в п. 2 г. Функтор $G : \mathscr{C}(I) \to \mathscr{A}b$ состоит из семейства абелевых групп $(G(i),\ i \in I)$ и отображений $\varphi_{ij} : G_i \to G_j$, по одному для каждой пары $i \leqslant j$, таких, что если $i \leqslant j \leqslant k$, то $\varphi_{jk}\varphi_{ij} = \varphi_{ik}$, $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{G(i)}$. Такие семейства обычно возникают в качестве сырья для взятия проективных и индуктивных пределов.

в) *Функторы забвения.* Большой класс тривиальных примеров функторов получается так: нужно перестать учитывать одну или несколько структур, имеющихся на объекте исходной категории. Так получаются функторы «множество элементов»:

$$\mathscr{T}op,\ \mathscr{D}iff,\ \mathscr{A}b,\ \mathscr{G}r \to \mathscr{S}et,\ X$$

а также функторы

$$\mathscr{D}iff \to \mathscr{T}op,\ A\text{-mod} \to \mathscr{A}b.$$

Очередное определение этого параграфа — морфизмы функторов (их называли также «естественными преобразованиями естественных конструкций»).

1.7. Определение. Пусть F, G — два функтора из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$. *Функторный морфизм* F в G (запись $f : F \to G$) состоит из семейства морфизмов

$$f(X) : F(X) \to G(X),$$

по одному для каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, которое удовлетворяет следующему условию:

для всякого морфизма $\varphi : X \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "f(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна. ■

Композиция функторных морфизмов определяется очевидным образом так же, как и тождественный функторный морфизм. В результате функторы $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ становятся объектами категории, которая обозначается Funct $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

1.8. Примеры. а) Если симплициальные множества $X, Y\in\Delta^0\mathscr{S}et$ рассматривать как функторы $\tilde{X}, Y : \Delta^0\to\mathscr{S}et$, то любое симплициальное отображение $f : X\to Y$ определяет морфизм этих функторов, и наоборот.

б) Рассмотрим категорию $\mathscr{E}xc$ (exact sequences of complexes), объектами которой являются точные тройки S комплексов абелевых групп

$$S: 0\to K^{\cdot}\xrightarrow{f} L^{\cdot}\xrightarrow{g} M^{\cdot}\to 0,$$

а морфизмами — коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K^{\cdot} & \xrightarrow{f} & L^{\cdot} & \xrightarrow{g} & M^{\cdot} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \\ 0 & \to & \tilde{K}^{\cdot} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{L}^{\cdot} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{M}^{\cdot} & \to & 0, \end{array}$$

где p, q, r — морфизмы комплексов. Фиксируем целое число n и рассмотрим два функтора:

$$F(S)=H^n(M^{\cdot}), \quad G(S)=H^{n+1}(K^{\cdot}).$$

Связывающие гомоморфизмы $\delta^n(S)$, рассмотренные в гл. 1, п. 1.5 (там они обозначались $\delta^n(f, g)$) составляют морфизм функторов $\delta^n : F\to G$.

1.9. Несколько определений. Следующие понятия теории категорий весьма полезны.

Категория $\mathscr{C}$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{D}$, если

а) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\subset\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$;

б) для каждых $X, Y\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)\subset\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y);$$

в) композиция морфизмов в $\mathscr{C}$ совпадает с их композицией как морфизмов в $\mathscr{D}$; для $X\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$, id_X в $\mathscr{C}$ совпадает с id_X в $\mathscr{D}$.

Подкатегория $\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$ называется *полной*, если для любых $X, Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y).$$

Функтор $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ называется *строгим*, если для любых X, $Y\in\mathrm{Ob}\mathscr{C}$ отображение

$$F:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$$

является вложением, и *полным*, если оно является сюръективным.

В частности, вложение полной подкатегории $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ является строгим и полным функтором. Обратно, можно доказать, что всякий строгий и полный функтор получается таким образом.

Объект α произвольной категории $\mathscr{C}$ называется *начальным*, если для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\alpha, X)$ состоит из одного элемента. Аналогично, $\omega \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$ называется *конечным* объектом, если для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, \omega)$ состоит из одного элемента. Ясно, что как начальный, так и конечный объекты категории $\mathscr{C}$ (если они существуют) определяются однозначно с точностью до изоморфизма.

Пример. В категории $\mathscr{S}et$ начальным объектом является пустое множество, а конечным — одноточечное множество.

1.10. Изоморфизм. Многие математические задачи — это задачи классификации: простых групп, особенностей и т. п. Ниже мы опишем категорный подход к этим задачам. Классификация — это обычно классификация с точностью до изоморфизма.

1.10.1. Определение. а. Морфизм $\varphi : X \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $\psi : Y \to X$, что $\psi\varphi = \mathrm{id}_X$, $\varphi\psi = \mathrm{id}_Y$.

б. Объекты X, Y в категории $\mathscr{C}$ называются *изоморфными*, если между ними существует хотя бы один изоморфизм.

Читатель легко проверит, что отношение «быть изоморфным» является отношением эквивалентности в $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Морфизмы φ, ψ со свойствами, указанными в определении, называются взаимно обратными. Каждый изоморфизм однозначно определяет обратный к нему изоморфизм.

Если применить это определение к категории функторов (см. п. 1.5 г), получится важное понятие *изоморфизма функторов*. Именно, изоморфизм между функторами $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ и $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ — это морфизм функторов $f : F \to G$, для которого есть обратный морфизм $g : G \to F : gf = \mathrm{id}_F$, $fg = \mathrm{id}_G$.

Легко проверить, что в этом определении существование обратного морфизма функторов $g : G \to F$ можно заменить более естественным условием: для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ морфизм $f(X) : F(X) \to G(X)$ является изоморфизмом.

Применение определения 1.1 к «категории категорий» дает сравнительно бесполезное понятие изоморфизма категорий. Существенно более полезное определение таково:

1.11. Определение. а. Функтор $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ называется *эквивалентностью категорий*, если существует такой функтор $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, что функтор GF изоморфен $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, а FG изоморфен $\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$.

б. Категории $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ называются *эквивалентными*, если существует функтор, осуществляющий их эквивалентность. ■

Функтор G из а) иногда называется *квазиобратным* к функтору F.

1.12. Пример. Пусть Vect_k^n — категория n-мерных векторных пространств над полем k; V_k^n — категория с одним объектом

k^n и линейными отображениями в качестве морфизмов. Имеется очевидный функтор вложения $V_k^n \to \mathrm{Vect}_k^n$, который является эквивалентностью категорий.

Этот пример типичен: а) эквивалентные категории имеют «одинаковые» классы изоморфизма объектов и «одинаковые» морфизмы между этими классами; б) построение функторов, обратных к эквивалентности, часто неоднозначно и требует аксиомы выбора: в данном примере следует выбрать базисы во всех n-мерных пространствах.

Формально при установлении того, что некоторый заданный функтор является эквивалентностью категорий, бывает удобно пользоваться следующим простым результатом.

1.13. Теорема. Функтор $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ является эквивалентностью категорий, если и только если

а) F — строгий и полный функтор;

б) каждый $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ изоморфен объекту вида $F(X)$ для некоторого $X \in Ob\,\mathscr{D}$.

1.14. Примеры. Содержательную теорему об эквивалентности категорий часто можно представлять себе как вскрытие двух дополнительных способов описания одного и того же математического объекта. Следующие классические небольшие теории, содержание каждой из которых можно резюмировать в виде теоремы эквивалентности, иллюстрируют это утверждение.

а. *Теория Галуа.* Пусть k — некоторое поле, для упрощения формулировок характеристики нуль. Обозначим через G группу Галуа алгебраического замыкания $\bar{k}/k$ с топологией Крулля. Значительную часть теории Галуа можно резюмировать в следующем высказывании: двойственная категория конечномерных коммутативных полупростых k-алгебр $(k\text{-}Alg)^0$ эквивалентна категории конечных топологических G-множеств $G\text{-}\mathscr{S}et$.

б. *Теория фундаментальной группы Пуанкаре.* Пусть X — линейно связное хаусдорфово топологическое пространство с отмеченной точкой $x_0 \in X$. Обозначим через $\mathscr{C}ov_X$ категорию, объектами которой являются накрытия $p: Y \to X$, а морфизмами $p_1 \to p_2$ — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

С другой стороны, пусть $\pi_1 = \pi_1(X)$ — фундаментальная группа X и $\pi_1\text{-}\mathscr{S}et$ — категория левых π_1-множеств.

Теория фундаментальной группы резюмируется в следующем утверждении.

Категория $\mathscr{C}ov_X$ эквивалентна категории $\pi_1\text{-}\mathscr{S}et$.

в. *Коммутативные нормированные кольца.* Пусть $\mathcal{B}an$ — категория, объекты которой коммутативные нормированные кольца с инволюцией, а морфизмы — гомоморфизмы колец, сохраняющие норму и инволюцию.

С другой стороны, обозначим через $\mathcal{H}aus$ полную подкатегорию категории $\mathcal{T}op$, состоящую из компактных хаусдорфовых топологических пространств. Одно из основных утверждений теории коммутативных нормированных колец можно сформулировать так:

Категории $(\mathcal{B}an)^0$ и $\mathcal{H}aus$ эквивалентны.

г. *Теория двойственности Понтрягина.* Пусть $\mathcal{C}$ — категория коммутативных локально компактных топологических групп (и непрерывных гомоморфизмов). Теорема двойственности Понтрягина может быть выражена следующим образом:

Категория $\mathcal{C}$ эквивалентна двойственной категории $\mathcal{C}^0$.

Точнее, пусть $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^0$ и $F^0:\mathcal{C}^0\to\mathcal{C}$ — функторы, сопоставляющие каждый группе G ее группу унитарных характеров G^*. Более точная формулировка теоремы двойственности звучит так: Функторы F, F^0 квазиобратны друг другу.

1.15. Представимые функторы. Пусть $\hat{\mathcal{C}}$ — категория функторов (см. п. 1.7)

$$\hat{\mathcal{C}}=\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{S}et).$$

Рассмотрим функтор $h_X:\mathcal{C}^0\to\mathcal{S}et$, $h_X(Y^0)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ как объект $\hat{\mathcal{C}}$.

1.15.1. Определение. Функтор $F\in\mathrm{Ob}\hat{\mathcal{C}}$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида h_X для некоторого $X\in\mathrm{Ob}\mathcal{C}$. В этом случае говорят, что объект X *представляет* функтор F. ■

Пусть $\varphi:X_1\to X_2$ — некоторый морфизм в $\mathcal{C}$. Ему соответствует морфизм функторов $h_\varphi:h_{X_1}\to h_{X_2}$, который любому объекту $Y\in\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ сопоставляет отображение

$$h_\varphi(Y):h_{X_1}(Y)\to h_{X_2}(Y),$$

переводящее морфизм $\theta\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1)=h_{X_1}(Y)$ в композицию $\varphi\circ\theta\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)=h_{X_2}(Y)$. Очевидно, $h_{\varphi\psi}=h_\varphi h_\psi$.

1.16. Теорема. В описанных обозначениях отображение $\varphi\mapsto h_\varphi$ определяет изоморфизм множеств

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y).$$

Более того, это изоморфизм функторов $C^0\times C\to\mathcal{S}et$ от аргументов X, Y. Поэтому функтор $h:\mathcal{C}\to\hat{\mathcal{C}}$, задаваемый формулами $h(X)=h_X$, $h(\varphi)=h_\varphi$, задает эквивалентность категории $\mathcal{C}$ с полной подкатегорией $\hat{\mathcal{C}}$, состоящей из представимых функторов.

1.16.1. Следствие. Если функтор из $\hat{\mathscr{C}}$ представим, то представляющий его объект X определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

1.17. Пример: прямое и расслоенное произведение. Напомним, что в теории множеств $X \times Y$ есть множество упорядоченных пар $\{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Введем определение прямого произведения двух объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ двумя способами.

а) Прямое произведение $X \times Y$ «есть» объект Z, представляющий функтор $U \mapsto$ (прямое произведение $h_X(U) \times h_Y(U)$) (если этот функтор представим).

б) Прямое произведение $X \times Y$ «есть» объект Z, заданный вместе с морфизмами проекции $X \xleftarrow{p_X} Z \xrightarrow{p_Y} Y$, такой, что для любой пары морфизмов $X \xleftarrow{p'_X} Z' \xrightarrow{p'_Y} Y$ существует единственный морфизм $q: Z' \to Z$, для которого $p'_X = p_X q$, $p'_Y = p_Y q$ (снова с оговоркой: если (Z, p_X, p_Y) с этими свойствами существует). Это второе определение — результат предварительного описания теоретико-множественной конструкции на языке категории $\mathscr{S}et$.

Легкое обобщение этой конструкции позволяет ввести также категорный вариант расслоенного произведения. Напомним, что если $\varphi: X \to S$, $\psi: Y \to S$ — два отображения множеств, то расслоенным произведением X и Y над S называется множество пар

$$X \underset{S}{\times} Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\} \subset X \times Y.$$

Объект $X \underset{S}{\times} Y$ в категории также можно ввести двум способами.

а′) $X \underset{S}{\times} Y$ представляет функтор $U \mapsto X(U) \underset{S(U)}{\times} Y(U)$.

б′) $X \underset{S}{\times} Y$ «есть» обычное прямое произведение в новой категории $\mathscr{C}_S$, объектами которой являются морфизмы $\varphi: X \to S$ в $\mathscr{C}$, а морфизмами $X \xrightarrow{\varphi} S$ в $Y \xrightarrow{\psi} S$ — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & S & \end{tikzcd},$$

где $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

Диаграмма б) в категории $\mathscr{C}_S$ представлена диаграммой в категории $\mathscr{C}$ вида

$$\begin{tikzcd} X \underset{S}{\times} Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & S \end{tikzcd}$$

которая обладает очевидным свойством универсальности и называется *«декартовым квадратом»*.

1.18. Обращение стрелок. По всякой категорной конструкции можно определить двойственную ей: провести исходную конструкцию в категории $\mathscr{C}^0$ и интерпретировать результат в категории $\mathscr{C}$, иными словами обратить все стрелки в определении. Так получается конструкция амальгамированной суммы», или *копроизведения*, или кодекартова квадрата, отвечающего диаграмме $X\xleftarrow{\varphi}S\xrightarrow{\psi}Y$:

$$\begin{tikzcd}
X \underset{S}{\sqcup} Y & Y \arrow[l, "i_Y"'] \\
X \arrow[u, "i_X"] & S \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Свойство универсальности этого квадрата состоит в том, что по любой диаграмме $X\xrightarrow{j_X}Z\xleftarrow{j_Y}Y$ с условием $j_X\varphi=j_Y\psi$ однозначно строится морфизм $X\underset{S}{\sqcup}Y\xrightarrow{q}Z$ с $j_X=qi_X$, $j_Y=qi_Y$.

В оставшейся части этого параграфа мы приведем два важных понятия теории категорий, которые удобно вводить в терминах представимых функторов: понятие предела и понятие сопряженного функтора.

1.19. Пределы. Зафиксируем некоторую категорию J (часто называемую категорией индексов); во многих случаях категория J является конечной (имеет конечное число объектов и морфизмов). Напомним, что через $\mathrm{Funct}(J,\mathscr{C})$ обозначается категория функторов $F:J\to\mathscr{C}$ (см. п. 1.7).

Диагональный функтор $\Delta:\mathscr{C}\to\mathrm{Funct}(J,\mathscr{C})$ определяется следующим образом:

На объектах: $\Delta X=\{$постоянный функтор $J\to\mathscr{C}$ принимающий значение $X\}$, т. е. $\Delta X(j)=X$ для $j\in\mathrm{Ob}\,J$, $\Delta X(\varphi)=\mathrm{id}_X$ для морфизмов φ в J.

На морфизмах: для $\psi:X\to X'$ в $\mathscr{C}$, $\Delta\psi:\Delta X\to\Delta X'$ задается так: $\Delta\psi(j)=\psi:X=\Delta X(j)\to X'=\Delta X'(j)$.

Ясно, что $\Delta\psi$ является морфизмом функторов и $\Delta(\psi\psi')=\Delta\psi\cdot\Delta\psi'$, так что Δ действительно является функтором из $\mathscr{C}$ в $\mathrm{Funct}(J,\mathscr{C})$.

1.19.1. Определение. Пусть $F:J-\mathscr{C}$ — некоторый функтор. *Проективным пределом* функтора F в категории $\mathscr{C}$ называется объект $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, представляющий функтор

$$Y\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(J,\mathscr{C})}(\Delta Y,F):\mathscr{C}^0\to\mathscr{S}et.$$

Проективный предел F обозначается $X=\varprojlim F$; иногда он называется обратным пределом или просто пределом. ■

Согласно этому определению $X = \varprojlim F$ характеризуется равенством

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(J, \mathscr{C})}(\Delta Y, F). \tag{1}$$

Теорема п. 1.16 показывает, что если $\varprojlim F$ существует, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма.

1.20. Универсальное свойство предела. Любой функтор $F: J \to \mathscr{C}$ задается набором объектов $F(j) = X_j \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и набором морфизмов $F(\varphi): X_j \to X'_{j'}$, по одному для $\varphi: j \to j'$ в J.

Пусть существует предел $X = \varprojlim F$, положим в (1) $Y = X$. Тождественному морфизму $\mathrm{id}_X : X \to X$ в $\mathscr{C}$ отвечает морфизм функторов $f: \Delta X \to F$, который состоит из семейства морфизмов $f(j) : X - X_j$ в $\mathscr{C}$, по одному для каждого $j \in \mathrm{Ob}\,J$, удовлетворяющих условиям

$$F(\varphi) f(j) = f(j') \text{ для каждого } \varphi : j \to j' \text{ в } J. \tag{2}$$

Далее, произвольный морфизм функторов $g : \Delta Y \to F$ состоит из семейства морфизмов $g(j) : Y \to X_j$ в $\mathscr{C}$, $j \in \mathrm{Ob}\,J$, удовлетворяющих аналогичным условиям

$$F(\varphi) g(j) = g(j') \text{ для каждого } \varphi : j \to j'. \tag{3}$$

Формула (1) показывает, что определение $\varprojlim F$ можно сформулировать в виде следующего свойства универсальности:

Объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ является проективным пределом функтора $F : J \to \mathscr{C}$ в категории $\mathscr{C}$, если задано семейство морфизмов $f(j) : X \to X_j = F(j)$ в $\mathscr{C}$, по одному для каждого $j \in \mathrm{Ob}(J)$, удовлетворяющих условиям (2) и такое, что для любого семейства $g(j) : Y \to X_j$, $j \in \mathrm{Ob}\,J$, удовлетворяющего условиям (3), существует единственный морфизм $\psi : Y \to X$ в $\mathscr{C}$ такой, что $g(j) = f(j) \circ \psi$.

1.21. Двойственная теория: копределы. Пусть снова J — категория индексов, F — функтор из J в $\mathscr{C}$. *Индуктивным пределом* (прямым пределом, копределом) функтора F в категории $\mathscr{C}$ называется объект $X = \varinjlim F$ в $\mathscr{C}$, представляющий функтор

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(J, \mathscr{C})}(F, \Delta Y): \mathscr{C} \to \mathscr{S}et.$$

Другими словами, $X = \varinjlim F$, если

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(J, \mathscr{C})}(F, \Delta Y)$$

функториально по Y.

Индуктивный предел может быть определен универсальным свойством, двойственным определению в пределах в п. 1.20.

В классических категориях $\mathscr{S}et$, $\mathscr{G}r$, $\mathscr{T}op$, $\mathscr{A}b$ конечные пределы и копределы всегда существуют.

1.22. Пределы по частично упорядоченному множеству. Важный частный (и исторически первый) случай пределов возникает в случае, когда категория индексов J — это категория $\mathscr{C}(I)$ некоторого частично упорядоченного множества I (см. п. 1.5.г).

а) Пусть $\mathscr{C}=\mathscr{S}et$ — категория множеств. Функтор $F:J\to\mathscr{S}et$ — это набор множеств X_α, $\alpha\in I$ и отображений $f_{\alpha\beta}:X_\alpha\to X_\beta$, $\alpha\leqslant\beta$, таких, что $f_{\alpha\alpha}=\mathrm{id}$, $f_{\beta\gamma}f_{\alpha\beta}=f_{\alpha\gamma}$.

Легко проверить, что $\varinjlim F$ в $\mathscr{S}et$ строится следующим образом. Назовем подмножество $L\subset I$ полным, если $(\alpha\in L,\ \beta>\alpha)\Rightarrow\beta\in L$, то есть вместе с каждым элементом в L входят и все большие. Назовем нитью набор $\{x_\alpha\in X_\alpha,\ \alpha\in L\}$ для некоторого полного L, такой, что $f_{\alpha\beta}x_\alpha=x_\beta$ для $\alpha\leqslant\beta$, α, $\beta\in L$. Тогда $\varinjlim F$ есть множество классов эквивалентности нитей по соотношению $\{x_\alpha,\ \alpha\in L\}\sim\{x'_\beta,\ \beta\in L'\}$, если и только если для каждых $\alpha\in L$, $\beta\in L'$ существует γ, $\gamma\geqslant\alpha$, $\gamma\geqslant\beta$ такое, что $f_{\alpha\gamma}x_\alpha=f_{\beta\gamma}x'_\beta$.

Далее, если $I'\subset I$ — фильтрующее подмножество (то есть для каждого $\alpha\in I$ найдется $\beta\in I'$, $\beta\geqslant\alpha$), то $\varinjlim F$ для $F:\mathscr{C}(I)\to\mathscr{S}et$ совпадает с $\varinjlim F'$, где F' — ограничение F на $\mathscr{C}(I')\subset\mathscr{C}(I)$.

Аналогичные утверждения справедливы для категорий $\mathscr{G}r$, $\mathscr{A}b$, $\mathscr{T}op$.

В случае, когда частично упорядоченное множество I является направленным (для любых $\alpha,\beta\in I$ существует $\gamma\in I$, большее их обоих; классический пример: $I=\mathbf{Z}_+$ — положительные целые числа) $\varinjlim F$ для $F:\mathscr{C}(I)\to\mathscr{C}$ раньше назывался *пределом прямого спектра*, а $\varprojlim F$ для $F:\mathscr{C}(I)\to\mathscr{C}^0$ — *пределом обратного спектра*.

1.23. Сопряженные функторы. Последнее важное понятие теории категории, которое мы изложим — это понятие сопряженного функтора.

Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — две категории, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ — функтор.

1.23.1. Определение — лемма. Предположим, что функтор $T\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(T),Y)$ из $\mathscr{C}^0$ в $\mathscr{S}et$ для любого $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ представим объектом $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Отображение $Y\mapsto X$ продолжается до единственного функтора $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$, задающего изоморфизм бифункторов $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,G(Y))$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(T),Y)$ из $\mathscr{C}^0\times\mathscr{D}$ в $\mathscr{S}et$. Функтор G называется *правым сопряженным* к F (а F — *левым сопряженным* к G).

1.24. Морфизмы сопряжения. Пусть F и G — пара сопряженных функторов, так что у нас есть функториальные по X и Y изоморфизмы множеств

$$\alpha:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y))\,\tilde{\to}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y).$$

Полагая $X=G(Y)$, получаем морфизм

$$\sigma_Y=\alpha(\mathrm{id}_{G(Y)}) : FG(Y)\to Y.$$

С другой стороны, полагая $Y=F(X)$, получаем морфизм

$$\tau_X=\alpha^{-1}(\mathrm{id}_{F(X)}) : X\to GF(X).$$

Легко проверить, что $\{\sigma_Y\}$ и $\{\tau_X\}$ задают морфизмы функторов

$$\sigma: FG\to \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}, \quad \tau: \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\to GF. \tag{4}$$

Эти морфизмы функторов называются *морфизмами сопряжения*, отвечающими паре сопряженных функторов F, G. Легко проверить, что они удовлетворяют следующему условию:

Композиции морфизмов функторов

$$F\xrightarrow{F\circ\tau} FGF\xrightarrow{\sigma\circ F} F; \quad G\xrightarrow{\tau\circ G} GFG\xrightarrow{G\circ\sigma} G \tag{5}$$

являются тождественными морфизмами функторов F и G соответственно.

Оказывается, что существование морфизмов сопряжений эквивалентно сопряженности функторов F и G. Точнее, если F: $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, G: $\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ — два функтора и заданы изоморфизмы функторов (4), удовлетворяющие условиям (5), то F и G сопряжены: изоморфизм α есть $\alpha(u)=\sigma_Y\circ F(u)$, а обратный изоморфизм есть $\alpha^{-1}(v)=G(v)\circ\tau_x$.

1.25. Примеры. а) Ряд конструкций алгебры и топологии можно интерпретировать как применение функторов, сопряженных к стандартным функторам, аналогичным функторам забвения (см. табл. 1).

б) Пусть R, S — два кольца, $M={}_RM_S$ — (R,S)-бимодуль (слева над R, справа над S). Тогда функтор $X\to M\otimes_S X$: S-mod$\to R$-mod, сопряжен слева функтору $Y\to\mathrm{Hom}_R(M. Y)$.

в) Функтор $\varprojlim$ является сопряженным справа, а $\varinjlim$ сопряженным слева к диагональному функтору $\Delta:\mathscr{C}\to\mathrm{Funct}(J,\mathscr{C})$.

г) Пусть F — функтор из категории $\mathscr{S}\mathscr{C}at$ малых категорий (таких, у которых $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ — множество) в $\mathscr{S}et$, сопоставляющий $\mathscr{C}$ множество $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Тогда у F есть левый сопряженный G_l, сопоставляющий множеству X дискретную категорию $\mathscr{C}_X$ $\left(\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_X=X,\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_X}(x,y)=\begin{cases}\mathrm{id}_x, & x=y,\\ \varnothing, & x\neq y.\end{cases}\right)$ и правый сопряженный G_r, сопоставляющий X категорию $\widetilde{C}_X$ с $\mathrm{Ob}\,\widetilde{C}_X=X$, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{C}_X}(x,y)$ — одноэлементное множество для всех x, y. В свою очередь у G_l есть левый сопряженный, сопоставляющий малой категории C множество ее связных компонент (то есть множество классов эквивалентности $\mathrm{Ob}\,C$ по соотношению $x\sim y$, если и только если $\mathrm{Hom}_C(x,y)$ непусто).

Таблица 1

Функтор забвения $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$	Левый сопряженный $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$
1. $\mathscr{G}\mathrm{r}\to\mathscr{S}\mathrm{et}$	свободная группа с данным множеством образующих
2. $\mathscr{A}\mathrm{b}\to\mathscr{S}\mathrm{et}$	свободная абелева группа с данным множеством образующих
3. R-mod$\to\mathscr{A}\mathrm{b}$ (R — фиксированное кольцо)	$A\to R\otimes_Z A$
4. k-Alg (ассоциативные алгебры над полем k)$\to\mathrm{Vect}_k$ (векторные пространства над k)	тензорная алгебра пространства V
5. $\mathscr{T}\mathrm{op}\to\mathscr{S}\mathrm{et}$	множество с дискретной топологией
6. $\mathscr{C}ommet$ (полные метрические пространства)$\to\mathscr{M}\mathrm{et}$ (метрические пространства)	пополнение метрического пространства
7. k-Alg$\to\mathrm{Lie}_k$ (алгебры Ли над k); функтор превращает алгебру A в алгебру Ли с операцией $[a, b] = ab-ba$	универсальная обертывающая алгебра

§ 2. Аддитивные и абелевы категории

2.1. Гомологическая алгебра и категории. С категорной точки зрения, гомологическая алгебра изучает свойства функторов, принимающих значения в специальном классе категорий — абелевых категориях. Это понятие аксиоматизирует основные свойства следующих конкретных категорий:

а. Абелевы группы.

б. Модули над кольцом.

в. Системы коэффициентов (гл. 1, п. 2.4) и предпучки абелевых групп.

г. Пучки абелевых групп.

Мы последовательно сформулируем аксиомы А1—А4 абелевой категории $\mathscr{C}$ (определив входящие в них понятия) и прокомментируем, каким образом они нарушаются для родственных, но не абелевых категорий, таких как топологические абелевы группы и группы с фильтрацией.

2.2. Аксиома А1. Каждое множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ снабжено структурой абелевой группы (которую мы будем записывать аддитивно): композиция морфизмов биаддитивна относительно этой структуры.

Иными словами, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}$ есть функтор $\mathscr{C}^0 \times \mathscr{C} \to \mathscr{A}b$.

2.3. Аксиома А2. Существует нулевой объект $0 \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ — такой, что $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0)$ — нулевая группа. Мы позволим себе обозначать 0 также нулевые морфизмы.

2.4. Аксиома А3. Для каждой пары объектов X_1, X_2 существует объект Y и морфизмы p_1, p_2, i_1, i_2:

$$X_1 \underset{i_1}{\overset{p_1}{\leftrightarrows}} Y \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} X_2 \qquad (1)$$

со следующими свойствами:

$$p_1 i_1 = \mathrm{id}_{X_1}, \quad p_2 i_2 = \mathrm{id}_{X_2}, \quad p_2 i_1 = p_1 i_2 = 0, \quad i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_Y.$$

Смысл этой аксиомы таков:

Следующие два квадрата являются соответственно декартовым и кодекартовым (пп. 1.17 и 1.18), то есть Y является одновременно прямым произведением и прямой суммой X_1 и X_2:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y & X_1 \arrow[l, "i_1"'] \\ X_2 \arrow[u, "i_2"] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

В частности, при данных X_1, X_2 любые две диаграммы вида (1) канонически изоморфны.

Теперь мы приступим к категорному анализу наименее тривиального свойства категории 1.а.—г. из п. 2.1 — существования в них точных последовательностей.

2.5. Ядро. Пусть категория $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиомам А1 и А2 и пусть $\varphi : X \to Y$ — некоторый морфизм. Рассмотрим функтор $\mathrm{Ker}\, \varphi : \mathscr{C}^0 \to \mathscr{A}b$:

$$(\mathrm{Ker}\, \varphi)(Z) = \mathrm{Ker}\, (h_X(Z) \to h_Y(Z))$$

$\mathrm{Ker}\, \varphi)(f)$ — ограничение $h_X(f)$ на $(\mathrm{Ker}\, \varphi)(Z)$ (см. п. 1.15). Вложение $(\mathrm{Ker}\, \varphi)(Z) \subset h_X(Z)$ определяет морфизм функторов $\mathrm{Ker}\, \varphi \to h_X$. Предположим, что $\mathrm{Ker}\, \varphi$ представлен объектом K. Этот объект определен вместе с морфизмом $k : K \to X$ и $\varphi \circ k = 0$. Диаграмма $K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{\varphi} Y$ обладает следующим универсальным свойством: для любого морфизма $K' \to X$ с $\varphi \circ k' = 0$ существует единственный морфизм $K' \xrightarrow{h} K$, для которого $k' = k \circ h$.

Морфизм k или пара (K, k) называется *ядром* φ; допуская вольность речи, мы будем также называть ядром объект K.

Легко проверить, что если ядро (K, k) морфизма φ существует, то оно определяется однозначно.

В категориях 1.а.—г. имеется теоретико-множественное понятие ядра: $\varphi^{-1}(0)$ в группах и модулях; семейство $\varphi_x^{-1}(0)$ в системах коэффициентов; семейство $\varphi_U^{-1}(0)$ в пучках, где морфизм пучков $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ представлен морфизмами $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ для всех открытых подмножеств U.

2.5.1. Лемма. а. В категориях а.—г. теоретико-множественное ядро морфизма $\varphi: X \to Y$ является объектом K той же категории.

б. Каноническое вложение этого объекта K в X является категорным ядром в смысле п. 5.

2.6. Коядро. Напрашивающееся наивное определение $\mathrm{Coker}\,\varphi$ как объекта, представляющего функтор $Z \mapsto \mathrm{Coker}(X(Z) \to Y(Z))$, является неправильным. Например, уже в категории абелевых групп он не изоморфен функтору, представленному теоретико-множественным коядром. В самом деле, положим $X = Y = \mathbf{Z}$, φ — умножение на целое число $n > 1$, $Z = \mathbf{Z}/n\mathrm{Z}$. Тогда $X(Z) = Y(Z) = 0$, так что $\mathrm{Coker}(X(Z) \to Y(Z)) = 0$, в то время как $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \mathrm{Coker}\,\varphi) \neq 0$ (здесь $\mathrm{Coker}\,\varphi = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ — теоретико-множественное коядро φ). Рекомендуем проверить, что функтор $Z \mapsto \mathrm{Coker}(X(Z) \to Y(Z))$ в нашем примере даже не представим.

Правильное определение $\mathrm{Coker}\,\varphi$, если этот функтор представим, требует двойной дуализации:

$$\mathrm{Coker}\,\varphi = (\mathrm{Ker}\,\varphi^0)^0,$$

где ^{0} — символ перехода к двойственной категории (см. п. 1.5б). Это определение равносильно каждому из следующих двух.

а. Коядро морфизма $\varphi: X \to Y$ есть морфизм $c: Y \to K'$ такой, что для любого обекта $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ последовательность групп

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K', Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

точна (это и означает, что $(K')^0$ представляет $\mathrm{Ker}\,\varphi^0$).

б. Коядро морфизма $\varphi: X \to Y$ есть морфизм $Y \xrightarrow{c} K'$ такой, что $c \circ \varphi = 0$ и для любого морфизма $Y \xrightarrow{c_1} K_1'$ с $c_1 \circ \varphi = 0$ существует единственный морфизм $h: K' \to K_1'$ с $c_1 = h \circ c$.

Так же, как и ядро, коядро $Y \xrightarrow{c} K'$, если оно существует, определяется однозначно с точностью до канонического изоморфизма.

В категориях 1.а.—в. имеется теоретико-множественное определение коядра и справедлив аналог леммы п. 2.5.1.

Сложнее обстоит дело в категории $\mathcal{S}\mathcal{A}b$ *пучков* абелевых групп. Дело в том, что даже если $\varphi: X \to Y$ — морфизм пучков, $\{K'(U) = \mathrm{Coker}\,\varphi_U\}$ может оказаться не пучком, а лишь предпучком. Можно проверить при этом, что $\{K'(U)\}$ является коядром в категории предпучков.

Ниже будет показано, как определять коядра морфизмов в категории пучков. Теперь же сформулируем последнюю аксиому.

2.7. Аксиома А4. *Для любого морфизма $\varphi: X \to Y$ существует последовательность*

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} K' \qquad (2)$$

со следующими свойствами:

а) $j \circ i = \varphi$;

б) *K есть ядро φ, K' есть коядро φ;*

в) *I есть коядро k и ядро c.*

Такая последовательность называется *каноническим разложением* φ.

2.8. Определение. Категория, для которой выполнены аксиомы А1—А3 называется *аддитивной*; категория, для которой выполнены аксиомы А1—А4, называется *абелевой*. ■

Все категории а.—г. в п. 2.1 аддитивны. Более того, все они абелевы. Существование канонического разложения морфизма $\varphi: G \to H$ в категории $\mathcal{Ab}$ (то есть изоморфизм $\operatorname{Im} \varphi \simeq G/\operatorname{Ker} \varphi$) обеспечено теоремой о гомоморфизме абелевых групп; аналогично устанавливается абелевость категории модулей над фиксированным кольцом. Для категорий из п. 2.1в каноническое разложение строится почленно. Так, в категории $\mathcal{PAb}$ предпучков абелевых групп, каноническое разложение морфизма $\varphi: X \to Y$ получается из канонических разложений морфизмов $\varphi_U: X(U) \to Y(U)$ в $\mathcal{Ab}$:

$$K(U) \xrightarrow{k_U} X(U) \xrightarrow{i_U} I(U) \xrightarrow{j_U} Y(U) \xrightarrow{c_U} K'(U),$$

которые, как легко проверить, совместимы с гомоморфизмами ограничения.

2.9. Комментарии к аксиоме А4. а) Если каноническое разложение морфизма φ существует, то любое другое каноническое разложение изоморфно ему, и этот изоморфизм определен однозначно.

б) Если постулировать только существование ядер и коядер, то для любого морфизма φ можно построить две половины диаграммы (4):

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I, \quad I' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} K',$$

где $k = \operatorname{Ker} \varphi$, $i = \operatorname{Coker} k$; $c = \operatorname{Coker} \varphi$, $j = \operatorname{Ker} c$. Дополнительное требование аксиомы А4 состоит в том, чтобы I и I' «совпадали», точнее, чтобы существовал изморфизм $I \xrightarrow{l} I'$ такой, что $\varphi = j \circ l \circ i$. Можно проверить, что морфизм l с таким свойством строится канонически, так что в конечном счете аксиома А4 требует его обратимости. Иногда (I', j) называют *образом* φ, а (I, i) — *кообразом*.

в) Аксиома А4 автодуальна в следующем смысле слова. Рассмотрим диаграмму (4) в двойственной категории $\mathscr{C}^0$:

$$K'^0 \xrightarrow{c^0} Y^0 \xrightarrow{j^0} I^0 \xrightarrow{i^0} X^0 \xrightarrow{k^0} K^0. \tag{3}$$

Если (2) есть каноническое разложение φ, то (3) есть каноническое разложение φ^0.

Аналогичными свойствами автодуальности обладают и аксиомы А1—А3. Таким образом, если считать, что $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^0}(Y^0, X^0)$ как абелева группа, то категория, двойственная к аддитивной, аддитивна, а категория, двойственная к абелевой, — абелева.

г) В абелевой категории всякий морфизм φ, у которого $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ и $\mathrm{Coker}\,\varphi = 0$, является изоморфизмом. В самом деле, коядро морфизма $0 \to X$ изоморфно $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$, а ядро морфизма $Y \to 0$ изоморфно $Y \xrightarrow{\mathrm{id}} Y$. Аксиома А4 поэтому показывает, что морфизмы i, j являются изоморфизмами: $X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y$.

д) Морфизмы φ, у которых $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$, называются мономорфизмами; морфизмы φ, у которых $\mathrm{Coker}\,\varphi = 0$, называются эпиморфизмами.

2.10. Пучки и предпучки. Пусть $\mathscr{S}\mathscr{A}b$ (соответственно $\mathscr{P}\mathscr{A}b$) — аддитивная категория пучков абелевых групп (соответственно предпучков абелевых групп) на топологическом пространстве M. Каждый пучок является предпучком с дополнительными свойствами; это определяет функтор вложения $\iota: \mathscr{S}\mathscr{A}b \to \mathscr{P}\mathscr{A}b$. В доказательстве абелевости категории $\mathscr{S}\mathscr{A}b$ основную роль играет существование левого сопряженного функтора, то есть функтора $s: \mathscr{P}\mathscr{A}b \to \mathscr{S}\mathscr{A}b$ и изоморфизма бифункторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathscr{A}b}(sX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}\mathscr{A}b}(X, \iota Y).$$

После этого устанавливается, что коядро морфизма пучков $\varphi: X \to Y$ можно определить как $s(\widetilde{K})$, где $\widetilde{K}$ — коядро φ в $\mathscr{P}\mathscr{A}b$, и проверяется аксиома о каноническом разложении А4.

2.10.1. Предложение. Функтор $\iota: \mathscr{S}\mathscr{A}b \to \mathscr{P}\mathscr{A}b$ обладает левым сопряженным.

2.11. Предложение. Пусть $\varphi: X \to Y$ — морфизм пучков в $\mathscr{S}\mathscr{A}b$ и пусть

$$K \xrightarrow{k} \iota X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} \iota Y \xrightarrow{c} K'$$

— каноническое разложение морфизма $\iota\varphi$ в абелевой категории $\mathscr{P}\mathscr{A}b$. Тогда диаграмма

$$sK \xrightarrow{s(k)} X = s\iota X \xrightarrow{s(i)} sI \xrightarrow{s(j)} Y = s\iota Y \xrightarrow{s(c)} s(K')$$

является каноническим разложением морфизма φ в категории $\mathscr{S}\mathscr{A}b$. В частности, категория $\mathscr{S}\mathscr{A}b$ абелева.

2.12. Примеры аддитивных неабелевых категорий. В описанных ниже категориях не выполнена аксиома A4.

а. *Фильтрованные абелевы группы.* Назовем объектом категории $\mathcal{A}b\mathcal{F}$ абелеву группу X с последовательностью подгрупп $\ldots\subset F^iX\subset F^{i+1}X\subset\ldots\subset X$. Положим

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b\mathcal{F}}(X, Y)=\{\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, Y)\,|\,\varphi(F^iX)\subset F^iY \text{ для всех } i\}.$$

Обозначим через $F^i\varphi$ ограничение $\varphi: F^iX\to F^iY$.

Ядро морфизма φ в $\mathcal{A}b\mathcal{F}$ как группа совпадает с ядром φ в $\mathcal{A}b$; фильтрация на нем есть $\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}b}F^i\varphi$. Коядро морфизма φ в $\mathcal{A}b\mathcal{F}$ как группа совпадает с коядром φ в $\mathcal{A}b$; фильтрация на нем есть

$$F^i\,\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}b\mathcal{F}}\,\varphi=F^iY/F^iY\cap\varphi(X).$$

Следующая конструкция доставляет морфизмы с нулевым ядром и коядром, не являющиеся изоморфизмами. Рассмотрим одну и ту же группу X с двумя фильтрациями, $F_1^iX\subset F_2^iX$ для всех i, и ее тождественный морфизм. Если хотя бы для одного i имеем $F_1^iX\neq F_2^iX$, то это — не изоморфизм. В силу п. 2.9 г) отсюда следует неабелевость категории $\mathcal{A}b\mathcal{F}$.

Для общего морфизма $\varphi: X\to Y$ в обозначениях п. 2.9б) имеем: $I=X/\mathrm{Ker}\,\varphi$, $I'=\varphi(X)$ как группы с фильтрациями

$$F^iI=F^iX/\mathrm{Ker}\,F^i\varphi,\quad F^iI'=F^iY\cap\varphi(X).$$

Канонический морфизм $I\to I'$ индуцирован φ; он является изоморфизмом в $\mathcal{A}b$. Однако, фильтрации $\varphi(F^iX)$ и $F^iY\cap\varphi(X)$ могут не совпадать, как в предыдущем примере, и тогда φ не будет иметь канонического разложения.

б. *Топологические абелевы группы.* Объектами категории $\mathcal{A}b\mathcal{T}$ являются абелевы группы с хаусдорфовой топологией, морфизмами — непрерывные морфизмы групп. В этой категории существуют ядра и коядра: $\mathrm{Ker}\,\varphi$, где $\varphi: X\to Y$, есть теоретико-групповое ядро φ с индуцированной топологией, а $\mathrm{Coker}\,\varphi$ есть $Y/\overline{\varphi(X)}$, где $\overline{\varphi(X)}$ — замыкание теоретико-множественного образа относительно топологии, индуцированной с Y.

В обозначениях п. 2.9б) имеем $I=X/\mathrm{Ker}\,\varphi$, $I'=\varphi(X)$, с топологией, индуцированной с Y. Отображение $I\to I'$ не является изоморфизмом, если $\varphi(X)$ не замкнут. Может оказаться также, что $\varphi(X)$ замкнут, но Y индуцирует на нем более слабую топологию. Например, тождественное отображение $\mathbf{R}$ с дискретной топологией в $\mathbf{R}$ с обычной топологией имеет нулевое ядро и коядро, но не является изоморфизмом.

2.13. Несколько определений. В произвольной абелевой категории имеют смысл большинство определений гл. 1. Приведем некоторые из них.

а) (Коцепным) *комплексом* в аддитивной категории $\mathcal{C}$ называется последовательность объектов и морфизмов

$$X^{\cdot}: \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots$$

со свойством $d^n \circ d^{n+1} = 0$ для всех n.

б) Если категория $\mathscr{C}$ абелева, то *n-мерной когомологией* комплекса $X^{\cdot}$ в ней называется объект

$$H^n(X^{\cdot}) = \operatorname{Coker} a^n = \operatorname{Ker} b^{n+1}, \qquad (4)$$

определяемый из коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker} d^n \arrow[dr, dashed, "b^{n+1}"] & \\
X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[dr, dashed, "a^n"'] & X^{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "d^{n+1}"] & X^{n+2}. \\
 & \operatorname{Ker} d^{n+1} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

(Равенство в (4) означает канонический изоморфизм.)

в) Комплекс $X^{\cdot}$ в абелевой категории называется *ацикличным в члене* X^n, если $H^n(X^{\cdot}) = 0$.

г) Комплекс $X^{\cdot}$ в абелевой категории называется *точным* (или *точной последовательностью*), если он ацикличен во всех членах.

Столь же естественно обобщаются на произвольную абелеву категорию и другие понятия гл. 1, § 1, а также определение спектральной последовательности из гл. 1, § 3. При этом остаются справедливыми аналоги теорем гл. 1, п. 1.5.1 и п. 3.3.

2.14. О методах доказательств в абелевых категориях. Главный тезис при работе с абелевой категорией состоит в том, что в произвольной абелевой категории справедливо любое утверждение, включающее конечное число объектов и морфизмов, и верное в категории модулей над фиксированным кольцом. Основанием для этого является следующая теорема вложения.

2.14.1. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, объекты которой образуют множество. Тогда существует кольцо R и точный функтор $F: \mathscr{A} \to R\text{-mod}$, который является вложением на объектах и изоморфизмом на Hom'ах.

Обычно эта теорема (или какой-либо аналогичный метод, например, связанный с понятием элемента объекта абелевой категории) используется для проверки тех или иных свойств объектов или (чаще) морфизмов, построенных с помощью тех или иных свойств универсальности. Например, она позволяет утверждать, что какая-либо последовательность точна или что некоторый морфизм является изоморфизмом, если соответствующее свойство выполнено в категории модулей.

Следующие два результата весьма часто используются в гомологической алгебре.

2.14.2. Лемма о пяти гомоморфизмах. Пусть задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \to & X_2 & \to & X_3 & \to & X_4 & \to & X_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ Y_1 & \to & Y_2 & \to & Y_3 & \to & Y_4 & \to & Y_5, \end{array}$$

в которой строки точны, f_1 — эпиморфизм, f_5 — мономорфизм, а f_2, f_4 — изоморфизмы. Тогда f_3 также изоморфизм.

2.14.3. Лемма о змее. Пусть задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X_1 & \xrightarrow{g_1} & X_2 & \xrightarrow{g_2} & X_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\ 0 & \to & Y_1 & \xrightarrow{h_1} & Y_2 & \xrightarrow{h_2} & Y_3 & \to & 0 \end{array}$$

с точными строками.

а) Последовательности

$$0 \to \operatorname{Ker} f_1 \xrightarrow{a_1} \operatorname{Ker} f_2 \xrightarrow{a_2} \operatorname{Ker} f_3$$

$$\operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{b_1} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{b_2} \operatorname{Coker} f_3 \to 0,$$

где a_1, a_2 (соответственно b_1, b_2) индуцируются морфизмами g_1, g_2 (соответственно h_1, h_2) точны.

б) Существует естественный морфизм $\delta : \operatorname{Ker} f_3 \to \operatorname{Coker} f_1$, соединяющий две точные последовательности в одну длинную точную последовательность.

§ 3. Функторы в абелевых категориях

3.1. Определение. Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ — аддитивные категории. Функтор $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ называется *аддитивным*, если все отображения

$$F : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), F(Y)), \quad X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$$

являются гомоморфизмами абелевых групп.

Основные характеристики аддитивных функторов связаны с тем, насколько они сохраняют ядра и коядра.

3.2. Определение. Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ — абелевы категории, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ — аддитивный функтор. Он называется *точным*, если для любой точной последовательности в $\mathscr{C}$

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

последовательность

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0 \tag{1}$$

точна. Функтор F называется *точным слева*, если последовательность (1) точна всюду, кроме, возможно, члена $F(Z)$. Наконец, функтор F называется *точным справа*, если последовательность (1) точна всюду, кроме, возможно, члена $F(X)$. ■

Исходный интерес к точности функтора объясняется следующими соображениями. Нас может интересовать, — исторически так оно и было, — задача вычисления значений F на конкретных объектах. Например, вычисление размерностей пространства сечений пучка — классическая «задача Римана—Роха». Если бы функтор «сечения пучка» был точным, то эта задача резко упростилась бы: а) для любой точной тройки $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_2 \to 0$ мы имели бы $\dim \Gamma(\mathcal{F}) = \dim\Gamma(\mathcal{F}_1) + \dim\Gamma(\mathcal{F}_2)$, б) интересующие нас пучки, скажем, на римановой поверхности без труда представляются в виде последовательных расширений несложно устроенных пучков, для которых $\dim\Gamma(\mathcal{F})$ известны. Но в действительности Γ точен только слева, и способ восполнения неточности справа — одна из основных задач гомологической алгебры.

Сначала укажем основные факты о точности самых важных функторов.

3.3. Предложение. В абелевой категории $\mathscr{C}$ функторы

$$\mathscr{C} \to \mathscr{A}b : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$$

(Y фиксирован) и

$$\mathscr{C}^0 \to \mathscr{A}b : X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$

(Y фиксирован) точные слева.

3.4. Предложение. Пусть A-mod (соответственно mod-A) — абелева категория левых (соответственно правых) A-модулей, где A — фиксированное кольцо. Функторы

$$A\text{-mod} \to \mathscr{A}b : X \mapsto Y \otimes_A X$$

Y — фиксированный объект mod-A) *и*

$$\text{mod-}A \to \mathscr{A}b : X \mapsto X \otimes_A Y$$

(Y — фиксированный объект A-mod) точны справа.

3.5. Предложение. Пусть X — топологическое пространство, $U \subset X$ — открытое множество, $\mathscr{S}\mathscr{A}b$ — категория пучков абелевых групп на X. Функтор

$$\Gamma(U, \cdot) : \mathscr{S}\mathscr{A}b \to \mathscr{A}b : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$$

точен слева.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}\mathscr{A}b$ — категория предпучков абелевых групп на X, $\iota : \mathscr{S}\mathscr{A}b \to \mathscr{P}\mathscr{A}b$ — функтор вложения. (см. п. 2.10). Докажем сперва, что ι *точен слева*. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$$

точная последовательность пучков. Можно считать, что $(\mathcal{F}', f) = \mathrm{Ker}\, g$ (ядро в $\mathscr{S}\mathscr{A}b$). Далее $\mathrm{Ker}(\iota g : \iota\mathcal{F} \to \iota\mathcal{F}'') = (\iota\mathcal{F}', \iota f)$. Поэтому последовательность

$$0 \to \iota\mathcal{F}' \xrightarrow{\iota f} \iota\mathcal{F} \xrightarrow{\iota g} \iota\mathcal{F}''$$

точна в $\mathcal{P}\mathcal{A}b$.

Ядро и коядро в категории $\mathcal{P}\mathcal{A}b$ определяются отдельно на каждом открытом множестве. Поэтому функтор

$$\mathcal{P}\mathcal{A}b \to \mathcal{A}b : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$$

точен. Следовательно, точна последовательность

$$0 \to \iota\mathcal{F}'(U) \to \iota\mathcal{F}(U) \to \iota\mathcal{F}''(U).$$

Ясно, что для любого пучка $\mathcal{F}$ имеем $\iota\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U)$. Поэтому функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ точен слева на категории $\mathcal{P}\mathcal{A}b$.

Отметим также, что функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(Y)$ точен слева на категории $\mathcal{P}\mathcal{A}b$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $Y \subset X$.

3.6. Определение. а) Объект Y абелевой категории называется *проективным*, если функтор $X \mapsto \operatorname{Hom}(X, Y)$ точен.

б) Объект Y абелевой категории называется *инъективным*, если функтор $X \mapsto \operatorname{Hom}(X, Y)$ точен.

в) Левый A-модуль X (соответственно правый A-модуль Y) называется *плоским*, если функтор $Y \mapsto Y \otimes_A X$ (соответственно $X \mapsto Y \otimes_A X$) точен.

Пункт в) этого определения относится также к пучкам модулей.

Обсудим разные аспекты этого определения.

3.7. Инъективность, проективность и продолжение морфизмов.

Рассмотрим две диаграммы в абелевой категории:

$$\begin{tikzcd} Y & & \\ X \arrow[u, dashed, "\psi"] & X' \arrow[l, "i"] \arrow[ul, "\varphi"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \\ X \arrow[r, "p"'] & X'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(диаграмма инъективности) (диаграмма проективности)

Условимся читать их как сокращенные записи следующих свойств объекта Y:

а) для любого сюръективного морфизма $X \to X''$ и любого морфизма $Y \to X''$ существует морфизм $Y \to X$, делающий диаграмму проективности коммутативной.

б) Для любого инъективного морфизма $X' \to X$ и любого морфизма $X' \to Y$ существует морфизм $X \to Y$, делающий диаграмму коммутативной.

Мы утверждаем, что справедливость утверждений а) (соответственно б)) равносильна проективности (соответственно инъективности) объекта Y.

3.8. Проективные и свободные модули. Из формулировки предыдущего пункта легко следует описание проективных объектов в категории модулей (левых или правых, все равно): модуль проективен, если и только если он является прямым слагаемым свободного модуля.

В категориях пучков модулей над окольцованными пространствами проективных объектов обычно оказывается мало. В некоторых конструкциях их могут заменить локально свободные пучки (пучки, становящиеся свободными после ограничения на элементы подходящего покрытия или решета).

3.9. Плоскость и соотношения. Рассмотрим левый A-модуль X и конечное семейство элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$. Семейство $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ называется *соотношением* между $x_1, \ldots, x_n$, если $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Более общо, семейство элементов $y_1, \ldots, y_n \in Y$, где Y — правый A-модуль, называется соотношением между x_i, если $\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i = 0$ в $Y \underset{A}{\otimes} X$.

Соотношения с коэффициентами в модуле можно получать как следствия из соотношений с коэффициентами в кольце. Точнее, пусть $(a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}) \in A^n$, $j = 1, \ldots, m$, — некоторое семейство соотношений между $x_1, \ldots, x_n$; $y^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m$, — некоторое семейство элементов Y. Тогда $\left(y_i = \sum_{j=1}^{m} y^{(j)} a_i^{(j)}\right) \in Y^n$ есть соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y^{(j)} a_i^{(j)} \otimes x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y^{(j)} \otimes a_i^{(j)} x_i = \sum_{j=0}^{m} y^{(j)} \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} x_i = 0.$$

Теперь мы можем охарактеризовать плоские правые A-модули Y с помощью следующего свойства: для любого левого A-модуля X и любого конечного семейства элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ все соотношения между x_i с коэффициентами в Y являются следствиями из соотношений между x_i с коэффициентами в A.

3.10. Плоскость и проективность. Следующие свойства плоских модулей почти очевидны:

а) Свободные модули являются плоскими.

б) Прямые слагаемые плоских модулей являются плоскими.

в) Индуктивные пределы семейств плоских модулей являются плоскими. (В проверке этого используется тот факт, что переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным умножением и сохраняет точность. См. некоторые подробности в следующем параграфе.)

Из а) и б) вытекает, что проективные модули плоские, а из в) — что индуктивные пределы проективных модулей плоские.

Теорема, доказанная независимо В. Е. Говоровым [9] и А. Лазаром [103] утверждает, что и обратно: любой плоский A-модуль изоморфен индуктивному пределу свободных модулей конечного типа по направленной системе индексов.

Последние функторы, свойствами точности которых мы займемся здесь — прямые и обратные образы пучков.

3.11. Определение. Пусть $f: M \to N$ — непрерывное отображение топологических пространств, $\mathcal{F}$ — пучок множеств на M. Его *прямым образом* называется пучок $f.(\mathcal{F})$, сечения которого над любым открытым множеством $U \subset X$ определяются формулой

$$f.(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)),$$

а ограничение с U на $V \subset U$ индуцировано ограничением с $f^{-1}(U)$ на $f^{-1}(V)$.

То, что $f.(\mathcal{F})$ является предпучком, очевидно; аксиома пучка проверяется непосредственно.

3.12. Свойства прямого образа. а) Конструкция $f.$ сохраняет дополнительные структуры, которые могут быть на пучке $\mathcal{F}$: пучок групп переходит в пучок групп и т. п. Если $\Phi = (f, \theta)$ — морфизм окольцованных пространств, а $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_M$-модулей, то $f.(\mathcal{F})$ имеет естественную структуру пучка $\mathcal{O}_N$-модулей. В самом деле, мы должны определить умножение $\mathcal{O}_N(U)$ на $f.(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Но морфизм окольцованных пространств включает семейство гомоморфизмов колец $\varphi_U: \mathcal{O}_N(U) \to \mathcal{O}_M(f^{-1}(U))$, согласованных с ограничениями, а $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ является $\mathcal{O}_M(f^{-1}(U))$-модулем. Поэтому перенос структуры превращает $f.(\mathcal{F})(U)$ в $\mathcal{O}_N(U)$-модуль. Это же рассуждение показывает, что $\{\varphi_U\}$ можно интерпретировать как морфизм пучков колец $\mathcal{O}_N \to f.(\mathcal{O}_M)$.

б) Пусть $f: M \to \{\cdot\}$. Тогда $f.(\mathcal{F}) = \Gamma(M, \mathcal{F})$ (глобальные сечения).

Более общо, если $f: M \to N$ — локально тривиальное расслоение, то $f.(\mathcal{F})$ есть «пучок сечений $\mathcal{F}$ вдоль слоев f».

Пусть $i: M \to N$ — замкнутое вложение. Пучок $i.(\mathcal{F})$ иногда называют «продолжение нулем пучка $\mathcal{F}$»: если $U \subset N \setminus M$, то $i.(\mathcal{F})(U)$ — одноточечное множество (если $\mathcal{F}$ — пучок множеств) или $i.(\mathcal{F})(U) = \{0\}$ (если $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп).

То же словоупотребление по отношению к незамкнутому вложению безопасно, если помнить, что слой $i.(\mathcal{F})$ над точками границы $i(M)$ может быть нетривиальным.

в) Любой морфизм пучков $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на M индуцирует (очевидным образом) морфизм пучков $f.(\varphi)$: $f.(\mathcal{F}) \to f.(\mathcal{G})$ на N.

Поэтому $f.$ является функтором из категории пучков на M в категорию пучков на N. То же верно для категорий пучков абелевых групп, модулей над окольцованными пространствами и т. п.

Из свойств функториальности $f.$ по f отметим два

$$(fg).=f.g., \quad \mathrm{id}.=\mathrm{Id}$$

3.13. Обратный образ. Пусть снова $f: M\to N$ — морфизм топологических пространств, $\mathcal{F}$ — пучок множеств на N. Основным свойством конструкции *обратного образа* $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ оказывается тот факт, что функтор $f^{\cdot}$ сопряжен слева функтору $f.$ (см. п. 1.23). Поэтому конструктивное определение $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ мы оформим как теорему существования. Такое изложение оправдано еще и тем, что при переходе, скажем, к пучкам модулей над окольцованными пространствами, конструкция $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ меняется, а свойство сопряженности остается.

3.13.1. Предложение—определение. Существует функтор $f^{\cdot}$: $\mathcal{S}\mathcal{S}et_N\to\mathcal{S}\mathcal{S}et_M$ между категориями пучков множеств над N и M и изоморфизм двух бифункторов

$$\mathrm{Hom}\,(f^{\cdot}(\mathcal{F}), \mathcal{G})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}\,(\mathcal{F}, f.(\mathcal{G})).$$

3.14. Свойства обратного образа. а) Пучок $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ можно явно построить таким образом: $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ — это пучок на M, ассоциированный с предпучком

$$U\mapsto\mathcal{F}(f(U)),\ U\subset M.$$

Поскольку множество $f(U)$, вообще говоря, не открыто в N, такое определение $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ требует двух «предельных переходов»: одного для задания $\mathcal{F}(f(U))$ и другого — для определения пучка, ассоциированного с предпучком.

Несложно проверить, что для любой точки $x\in M$ имеем $f^{\cdot}(\mathcal{F})_x=\mathcal{F}_{f(x)}$.

б) Конструкция $f^{\cdot}$ **сохраняет внутренние законы композиции**: если $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп, колец и т. п., то $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ принадлежит той же категории. Однако, если $\Phi=(f, \theta)$ — морфизм окольцованных пространств, а $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_N$-модулей, то $f^{\cdot}(\mathcal{F})$, вообще говоря, не имеет естественной структуры пучка $\mathcal{O}_M$-модулей. В самом деле, морфизм Φ определяет морфизм пучков колец $f^{\cdot}(\mathcal{O}_M)\to\mathcal{O}_N$, но на этот раз $f^{\cdot}(\mathcal{F})$ есть пучок модулей над началом, а не концом этой стрелки. Из алгебры известно, что замена базы в таком случае осуществляется с помощью тензорного произведения: естественно положить

$$f^*(\mathcal{F})=\mathcal{O}_M\otimes_{f^{\cdot}(\mathcal{O}_N)}f^{\cdot}(\mathcal{F}).$$

Можно проверить, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_M}(f^*(\mathcal{F}), \mathcal{G})=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_N}(\mathcal{F}, f.(\mathcal{G})),$$

так что $f^*(\mathcal{F})$ является правильным определением обратного образа в рассматриваемой категории.

в) Если $i: M \to N$ вложение, то $i^{\cdot}(\mathcal{F})$ есть ограничение пучка $\mathcal{F}$ на M.

г) Как и для прямых образов, имеем

$$(fg)^{\cdot} = g^{\cdot} f^{\cdot}, \quad \mathrm{id}^{\cdot} = \mathrm{Id}.$$

Свойства точности функторов $f_{.}$, $f^{\cdot}$ и f^* таковы:

3.14.1. Предложение. а) На категории пучков абелевых групп функтор $f_{.}$ точен слева, а $f^{\cdot}$ точен.

б) На категории пучков модулей над окольцованными пространствами функтор $f_{.}$ точен слева, а f^* точен справа.

Доказательство этого предложения использует следующие свойства точности сопряженных функторов.

3.15. Сопряженность и точность. Свойства точности сопряженных пар функторов описываются следующим утверждением.

Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — две абелевы категории, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — два аддитивных функтора и задан изоморфизм бифункторов $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}b$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

так что F сопряжен слева к G, а G сопряжен справа к F. Тогда F точен справа, а G точен слева.

§ 4. Классические производные функторы

4.1. Введение. Своим возникновением гомологическая алгебра обязана во многом тому, что большинство стандартных функторов, встречающихся в алгебре, геометрии и топологии являются точными лишь с одной стороны (справа или слева). Таким образом, для, скажем, точного слева функтора $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями (такого, как Hom или Γ) точная последовательность

$$0 \to A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A'' \to 0 \tag{1}$$

в $\mathcal{A}$ переходит в точную последовательность

$$0 \to F(A') \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(A'') \tag{2}$$

в $\mathcal{B}$, в котором морфизм $F(\psi)$, вообще говоря, не является эпиморфизмом. Классические производные функторы R^iF (в данном случае правые) до некоторой степени контролируют неэпиморфность $F(\psi)$. А именно, одно из важнейших свойств высших производных функторов $R^iF: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ состоит в том, что для каждой точной последовательности (1) строится длинная точная последовательность, являющаяся продолжением (2) вправо:

$$0 \to F(A') \xrightarrow{F(\varphi)} F(A) \xrightarrow{F(\psi)} F(A'') \xrightarrow{\delta^0} R^1F(A') \xrightarrow{R^1F(\varphi)} \to \ldots$$
$$\ldots \to R^{n-1}F(A'') \xrightarrow{\delta^{n-1}} R^nF(A') \xrightarrow{R^nF(\varphi)} R^nF(A) \xrightarrow{R^nF(\psi)} R^nF(A'') \to \ldots \qquad (3)$$

которая функториально зависит от (1).

Настоящий параграф посвящен строгому определению и основным свойствам производных функторов.

4.2. Определение. а) *Инъективной резольвентой* объекта A абелевой категории $\mathscr{A}$ называется точная последовательность в $\mathscr{A}$

$$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots,$$

в которой все I^i, $i \geqslant 0$, инъективны.

б) *Проективной резольвентой* объекта A абелевой категории $\mathscr{A}$ называется точная последовательность в $\mathscr{A}$:

$$\ldots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0,$$

в которой все P^{-i}, $i \geqslant 0$, проективны. ■

Иногда резольвенты обозначаются через $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$, $P^\cdot \xrightarrow{\varepsilon} A$; ε называется пополняющим морфизмом.

4.3. Свойства резольвент. а) Для того чтобы у любого объекта $\mathscr{A}$ существовала инъективная резольвента, необходимо и достаточно, чтобы любой объект $\mathscr{A}$ был подобъектом инъективного объекта $\mathscr{A}$.

В этом случае говорят, что в $\mathscr{A}$ имеется *достаточно много инъективных объектов.*

б) Пусть $\varphi: A \to A'$ — морфизм в $\mathscr{A}$ и $A \xrightarrow{\varepsilon} I^\cdot$, $A' \xrightarrow{\varepsilon'} I'^\cdot$ — инъективные резольвенты A и A'. Тогда существует морфизм комплексов $\varphi^\cdot: I^\cdot \to I'^\cdot$, продолжающий φ (то есть $\varepsilon'\varphi = \varphi^0\varepsilon$); любые два таких морфизма гомотопны. В частности, любые две инъективные резольвенты одного и того же объекта A гомотопически эквивалентны.

Аналогичные результаты справедливы и для проективных резольвент (в а) нужно требовать, чтобы любой объект $\mathscr{A}$ был факторобъектом проективного объекта).

4.4. Производные функторы. Начнем с определения правых производных функторов.

4.4.1. Определение. Пусть $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — точный слева функтор и в $\mathscr{A}$ достаточно много инъективных объектов. *Правые производные функторы* $R^iF: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, $i \geqslant 0$, определяются на объектах $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ формулой

$$R^iF(A) = H^i(F(I^\cdot)),$$

где $A \xrightarrow{\varepsilon} I^{\cdot}$ — какая-нибудь инъективная резольвента A, $F(I^{\cdot})$ — комплекс, получаемый почленным применением F к $I^{\cdot}$, и на морфизмах $\varphi: A \to A'$ в $\mathcal{A}$ формулой

$$R^iF(\varphi) = H^i(F(\varphi^{\cdot})),$$

где $\varphi^{\cdot}: I^{\cdot} \to I'^{\cdot}$ — какое-нибудь продолжение φ на резольвенты (как в 4.3б) $F(\varphi^{\cdot}): F(I^{\cdot}) \to F(I'^{\cdot})$ — соответствующий морфизм комплексов. ■

4.4.2. Предложение. а) $R^iF(A)$ и $R^iF(\varphi)$ определены корректно (точнее, объекты $R^iF(A)$, построенные по разным инъективным резольвентам A, канонически изоморфны; морфизмы $R^iF(\varphi)$, построенные по различным продолжениям φ на резольвенты, равны между собой).

б) R^iF являются аддитивными функторами из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

в) R^0F канонически изоморфно F.

г) По каждой короткой точной последовательности (1) в $\mathcal{A}$ строится длинная точная последовательность (3) в $\mathcal{B}$, функториально зависящая от (1).

д) Если F точен, то $R^iF = 0$ при $i > 0$.

Доказательство всех этих утверждений по существу вытекает из п. 4.3. В частности, для доказательства г) нужно построить по (1) точную последовательность резольвент

$$0 \to I'^{\cdot} \xrightarrow{\varphi^{\cdot}} I^{\cdot} \xrightarrow{\psi^{\cdot}} I''^{\cdot} \to 0$$

и применить теорему из гл. 1, п. 1.5.1.

4.4.3. Левые производные функторы. Если в $\mathcal{A}$ имеется достаточно много проективных объектов, то левые производные функторы L_iG для точного справа функтора $G: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ определяются (на объектах $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$) формулой $L_iG = H^{-i}(G(P^{\cdot}))$, где $P^{\cdot} \xrightarrow{\varepsilon} A$ — некоторая проективная резольвента A. Для левых производных функторов справедливы аналоги утверждений а) — д) из п. 4.4.2.

4.5. Производные функторы композиции; спектральная последовательность Гротендика. Пусть $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ — два точных слева функтора между абелевыми категориями. Тогда, как легко проверить, $G \circ F: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ также точен слева. Поэтому, предполагая, что в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ достаточно много инъективных объектов, получаем правые производные функторы R^iF, R^iG, $R^i(G \cdot F)$. Связь между ними выражает спектральная последовательность Гротендика.

4.5.1. Определение. Объект $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ называется *ацикличным* относительно точного слева функтора $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (или F-ацикличным), если $R^iF(A) = 0$ при $i > 0$. ■

Ясно, что любой инъективный объект F-ацикличен для любого F. Однако, для конкретных функторов F могут существовать и другие F-ацикличные объекты (см. примеры в гл. 4, § 5).

4.5.2. Теорема. Предположим, что $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ — два точных слева функтора, в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеется достаточно много инъективных объектов, и для любого инъективного $I\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, $F(I)$ является G-ацикличным. Тогда для любого $A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ существует спектральная последовательность (см. гл. 1, п. 3.1) с

$$E_2^{pq}=(R^pG)(R^qF(A)),$$

сходящаяся к $R^n(G\circ F)(A)$. Она функториальна по A. ■

4.5.3. План доказательства. Объекты $RF(A)$ — это когомологии комплекса $F(I^{\cdot})$, где $A\to I^{\cdot}$ — некоторая инъективная резольвента A. Аналогично, $R^n(G\circ F)(A)$ — это когомологии комплекса $(G\circ F)(I^{\cdot})$.

С другой стороны, чтобы вычислить $(R^pG)(R^qF(A))$, нужно применить почленно G к инъективным резольвентам $R^qF(A)\to J^{\cdot,q}$ объектов $R^qF(A)$.

Связь между $(G\circ F)(I^{\cdot})$ и $G(J^{\cdot,q})$ дается резольвентой Картана — Эйленберга комплекса $K^{\cdot}=F(I^{\cdot})$. Эта резольвента состоит из следующих данных.

а) *Двойной комплекс* (L^{ij}) с граничными операторами d_{I}, d_{II} степени (1, 0) и (0, 1) соответственно; $L^{ij}=0$ при $j<0$ или $i<1$; L^{ij} инъективны (основные определения, относящиеся к двойным комплексам, см. в гл. 1, п. 3.5).

б) *Морфизм комплексов* $\varepsilon^{\cdot}:K^{\cdot}\to L^{\cdot,0}$, с $d^{i,0}\circ\varepsilon^i=0$.

Чтобы сформулировать условия, накладываемые на эти данные, заметим, что (L^{ij}) порождает комплексы

$$\begin{gathered}0\to K^i\xrightarrow{\varepsilon^i} L^{i,0}\to L^{i,1}\to\ldots\\ 0\to B^i(K^{\cdot})\to B_I^i(L^{\cdot,0})\to B_I^i(L^{\cdot,1})\to\ldots\\ 0\to Z^i(K^{\cdot})\to Z_I^i(L^{\cdot,0})\to Z_I^i(L^{\cdot,1})\to\ldots\\ 0\to H^i(K^{\cdot})\to H_I^i(L^{\cdot,0})\to H_I^i(L^{\cdot,1})\to\ldots\end{gathered}\qquad(4)$$

(здесь B, Z обозначает соответственно границы и циклы). Потребуем выполнения следующих условий.

в) Все эти комплексы ацикличны.

г) Точные тройки

$$\begin{gathered}0\to B_I^i(L^{\cdot,j})\to Z_I^i(L^{\cdot,j})\to H_I^i(L^{\cdot,j})\to 0\\ 0\to Z_I^i(L^{\cdot,j})\to L^{ij}\to B_I^{i+1}(L^{\cdot,j})\to 0\end{gathered}$$

распадаются.

Тогда все объекты B_I, Z_I, H_I инъективны и, стало быть, комплексы (4) являются инъективными резольвентами для K^i, $B^i(K^{\cdot})$, $Z^i(K^{\cdot})$, $H^i(K^{\cdot})$ соответственно.

В частности, $(R^pG)(R^qF(A))$ можно вычислять как когомологии с номером p комплекса $G(H_I^q(L^{\cdot\cdot}))$. С другой стороны, $K^{\cdot}=F(I^{\cdot})$ можно, не меняя когомологий, заменить на диагональный комплекс $SL^{\cdot}$ двойного комплекса $L^{\cdot\cdot}$ (см. гл. 1, п. 3.5) и вычислять $R^n(G\circ F)(A)=H^n(G(F(I^{\cdot}))$ как $H^n(G(SL^{\cdot}))$. Кроме того, комплекс $SL^{\cdot}$ имеет фильтрацию

$$(F^pSL^{\cdot})^n=\bigoplus_{\substack{i+j=n\\ j\geqslant p}} L^{ij},$$

и член E^2, отвечающий этой фильтрации, оказывается равным $(R^pG)(R^qF(A))=H^p(G(H^q_{L_I}(L^{\cdot\cdot})))$.

Таким образом, искомая спектральная последовательность является частным случаем спектральной последовательности фильтрованного комплекса из гл. 1, п. 3.3.

4.6. Часто встречающиеся производные функторы. Многие производные функторы, встречающиеся в алгебре и топологии, имеют стандартные названия. Перечислим некоторые из них.

4.6.1. Функторы Ext. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория. Абелеву группу $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, N)$ для $M, N \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ можно рассматривать как функтор тремя различными способами:

а) при фиксированном M — как функтор $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \cdot)\colon \mathscr{A}\to\mathscr{Ab}$;

б) при фиксированном N — как функтор $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\cdot, N)\colon \mathscr{A}^0\to\mathscr{Ab}$;

в) как функтор $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\cdot, \cdot)\colon \mathscr{A}^0\times\mathscr{A}\to\mathscr{Ab}$.

Все эти функторы точны слева. Их правые производные функторы обозначаются $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(M, N)$; можно показать, что группы $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(M, N)$ не зависят от выбранного варианта определения функтора $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$. См. также гл. 3, п. 3.2.

4.6.2. Функторы Tor. Для фиксированного кольца R и для двух R-модулей M (правого) и N (левого) тензорное произведение $M\otimes_R N$ является абелевой группой. Аналогично предыдущему пункту, можно определить три функтора:

$$M\otimes_R\cdot\colon R\text{-mod}\to\mathscr{Ab};\qquad \cdot\otimes_R N\colon \text{mod-}R\to\mathscr{A};$$

$$\cdot\otimes_R\cdot\colon \text{mod-}R\times R\text{-mod}\to\mathscr{Ab}.$$

Все эти три функтора точны справа. Их левые производные функторы обозначаются $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$, $i\geqslant 0$. Они снова не зависят от варианта определения функтора $\otimes_R$.

4.6.3. Когомологии с коэффициентами в пучке. Функтор $\Gamma\colon \mathscr{S}\mathscr{Ab}_X\to\mathscr{Ab}$ сопоставляющий пучку абелевых групп $\mathscr{F}$ на пространстве X группу его глобальных сечений $\Gamma(X, \mathscr{F})$, точен слева. Его правые производные функторы называются *когомологиями* X с *коэффициентами* в $\mathcal{F}$ и обозначаются $H^i(X, \mathcal{F})$, $i \geqslant 0$. См. также гл. 4, п. 5.3.

4.6.4. Когомологии групп. Пусть G — группа, G-mod — категория G-модулей (см. гл. 1, п. 2.7). Функтор $G\text{-mod} \to \mathcal{Ab}$, сопоставляющий G-модулю A группу A^G его G-инвариантных элементов, точен слева. Его производные функторы — это *когомологии* $H^i(G, A)$ *группы* G *с коэффициентами в* A.

4.6.5. Когомологии алгебр Ли. Аналогично, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k, $\mathfrak{g}$-mod — категория $\mathfrak{g}$-модулей. *Когомологии* $H^i(\mathfrak{g}, M)$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с коэффициентами* в $\mathfrak{g}$*-модуле* M суть правые производные функторы точного слева функтора $\mathfrak{g}\text{-mod} \to \mathrm{Vect}_k$, $M \to M^{\mathfrak{g}} = \{m : Xm = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}\}$.

4.6.6. Функторы Цукермана. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра, $N(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{h})$ — соответствующие обертывающие алгебры. Элемент m $\mathfrak{g}$-модуля M называется $\mathfrak{h}$-конечным, если $\dim_k U(\mathfrak{h})m < \infty$. Легко проверить, что $\mathfrak{h}$-конечные элементы M боразуют $\mathfrak{g}$-подмодуль $M^{(\mathfrak{J})}$ в M. Функтор $M \to M^{(\mathfrak{J})}$ из категории $\mathfrak{g}$-mod в себя точен слева. Его правые производные функторы называются *функторами Цукермана*. Они играют важную роль в теории представлений (особенно в случае, когда $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ редуктивны), являясь алгебраическим аналогом функтора «голоморфные сечения аналитического векторного расслоения на G/H», где G, H — группы Ли с алгебрами $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В первых двух параграфах этой главы изложен набор стандартных фактов теории категорий; более подробно см. соответствующие разделы [8], [59], [77], [108]. В частности, теорема п. 1.16 — это одна из теорем Фрейда, дающих общую характеризацию представимых функторов; подробнее см. [108]. Относительно теоремы вложения п. 2.13.1 см. [20]. Леммы пп. 2.13.2 и 2.13.3 составляют основу большинства доказательств, ведущихся с помощью так называемого «диаграммного поиска»; см. обсуждение в [108].

Результаты, приведенные в § 3, группируются вокруг понятия точности функтора. Они являются, в основном, классическими и их доказательства можно найти в учебниках по гомологической алгебре [40], [107] (пп. 3.3—3.10) и по теории пучков [33], [91] (пп. 3.11—3.14). См. также [8].

В § 4 излагается теория производных функторов как она понималась в конце 50-х—начале 60-х годов; примерно в таком виде она содержится в [40], [77], [107]. Доказательства сформулированных результатов можно найти также в [8]; предложение п. 4.4.2 доказано в [85], теорема 4.5.2 — в [77].

Глава 3

ГОМОЛОГИИ В АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Малые размерности

1.1. Размерность 0. Нульмерные (ко)гомологии часто являются основным подлежащим вычислению объектом в классических задачах. С точки зрения гомологической алгебры они устроены вполне просто.

1.2. Размерность 1. Одномерные классы бывают особенно интересны для специальных коэффициентов.

1.2.1. Пучки. а. Пусть X — комплексное многообразие (или пространство), $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций на нем, $\mathcal{M}_X$ — пучок мероморфных функций, $\mathcal{P}_X = \mathcal{M}_X/\mathcal{Q}_X$ — пучок (аддитивных) особенностей. Классическая (аддитивная) проблема Кузена состоит в отыскании на X мероморфной функции с заданными особенностями. Эта задача всегда разрешима, если и только если отображение $H^0(\mathcal{M}_X) \to H^0(\mathcal{P}_X)$ сюръективно. Поэтому элементы $H^1(\mathcal{O}_X)$, лежащие в образе граничного отображения δ: $H^0(\mathcal{P}_X) \to H^1(\mathcal{O}_X)$ — это препятствия к разрешимости *проблемы Кузена.*

б. В той же ситуации пусть $\mathcal{O}_X^*$ (соответственно $\mathcal{M}_X^*$) — пучок голоморфно обратимых голоморфных функций (соответственно мероморфно обратимых мероморфных функций). Пучок $\mathcal{P}_X^* = \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ мультипликативных особенностей называется также *пучком дивизоров Картье.* Препятствия к построению функции с данным дивизором лежат в группе $H^1(\mathcal{O}_X^*)$.

Эта группа классифицирует также обратимые пучки на X, то есть пучки $\mathcal{O}_X$-модулей, которые локально свободны и имеют ранг 1. Чтобы построить по такому пучку $\mathcal{L}$ коцикл Чеха, построим накрытие (U_α), над элементами которого $\mathcal{L}$ имеет обратимые сечения t_α, и положим $g_{\alpha_0\alpha_1} = t_{\alpha_0} t_{\alpha_1}^{-1} \in \Gamma(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}, \mathcal{O}_X^*)$. Класс этого коцикла в $H^1(\mathcal{O}_X^*)$ не зависит от (U_α) и не меняется от смены t_α или $\mathcal{L}$ с точностью до изоморфизма. Умножение в группе $H^1(\mathcal{O}_X^*)$ отвечает тензорному умножению пучков.

Так интерпретированная группа $H^1(\mathcal{O}_X^*)$ называется *группой Пикара,* обозначается $\operatorname{Pic} X$ и полезна также в других категориях, например, в категории схем. Например, если A — кольцо целых чисел поля алгебраических чисел K, $X = \operatorname{Spec} A$, то $H^1(\mathcal{O}_X^*)$ — классическая группа классов идеалов K.

в. Пусть $\pi: X \to S$ — субмерсия комплексных многообразий, рассматриваемая как семейство своих слоев. Пусть $\mathcal{T}X$, $\mathcal{T}S$ — касательные пучки, $\mathcal{T}X/S$ — пучок вертикальных векторных полей. Из точной последовательности на X

$$0 \to \mathcal{T}X/S \to \mathcal{T}X \to \pi^*(\mathcal{T}S) \to 0$$

находим связывающий гомоморфизм

$$\mathcal{T}S = \pi_*(\pi^*\mathcal{T}S) \to R^1\pi_*\mathcal{T}X/S.$$

Оно называется *отображением Кодаиры — Спенсера*. Рассматривая его поточечно, мы можем убедиться, что оно ставит в соответствие касательному вектору в точке $s_0 \in S$ пространство деформаций слоя $X_{s_0} = \pi^{-1}(s_0)$ класс когомологий из $H^1(X_{s_0}, \mathcal{T}X_{s_0})$. Кодаира и Спенсер доказали, что если X_{s_0} компактно и $H^2(X_{s_0}, \mathcal{T}X_{s_0}) = 0$, то существует семейство, содержащее X_{s_0}, для которого δ_{s_0} является изоморфизмом, и любое другое семейство деформаций X_{s_0} индуцировано этим.

1.2.2. Группы. Если M — G-модуль с тривиальным действием, то $B^1 = (G, M) = 0$; $H^1(G, M) = Z^1(G, M) = \mathrm{Hom}(G, M)$ (гомоморфизмы групп). По этой причине в общем случае 1-коциклы называются также скрещенными гомоморфизмами.

В частности, если G — конечная p-группа (или про-p-группа), то $H^1(G, \mathbf{Z}_p) = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}_p) = \mathrm{Hom}(G/[G, G], \mathbf{Z}_p)$. Размерность этого линейного пространства над $\mathbf{Z}_p$ равна минимальному числу образующих группы G.

1.2.3. Алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k. Рассмотрим k как $\mathfrak{g}$-модуль с тривиальным действием. Тогда $H_1(\mathfrak{g}, k) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $H^1(\mathfrak{g}, k) = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*$.

Рассмотрим теперь в качестве модуля коэффициентов $\mathfrak{g}$ с присоединенным действием. Тогда $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$, где $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ — пространство дифференцирований $\mathfrak{g}$, а $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ — подпространство внутренних дифференцирований.

1.2.4. Классы расширений. Если X, Y — объекты абелевой категории с достаточным количеством проективных или инъективных объектов, то $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$ можно описать как группу классов точных троек $0 \to Y \to E \to X \to 0$ с точностью до отношения эквивалентности, определяемого существованием коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y & \to & E & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow\wr & & \| & & \\ 0 & \to & Y & \to & E' & \to & X & \to & 0. \end{array}$$

Чтобы по точной тройке построить элемент из $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$, рассмотрим начало инъективной резольвенты $0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to I^2$. По свойству продолжения, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y & \to & E & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow \\ 0 & \to & Y & \to & I^0 & \to & I^1 & \to & I^2. \end{array}$$

Морфизм $c: X \to I^1$ определяет коцикл в $\mathrm{Hom}(X, I^1)$, класс которого отвечает данной тройке.

Сумма $\alpha'+\alpha''$ элементов $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$, отвечающих тройкам $0\to Y\to E'\to X\to 0$, $0\to Y\to E''\to X\to 0$, — это класс тройки $0\to Y\to E\to X\to 0$, определяемой из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y\oplus Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E'\oplus E'' \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "{[1]}"] & X\oplus X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y\oplus Y \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "{[2]}"] & \tilde{E} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E \arrow[r] & X \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где Δ — диагональный морфизм, ∇ — морфизм суммирования, [1] и [2] — соответственно декартов и кодекартов квадраты (см. гл. 2, пп. 1.17, 1.18).

1.3. **Размерность 2.** Ряд классических конструкций интерпретируется с помощью двумерных когомологий.

1.3.1. **Пучки.** Двумерные классы когомологий пучков часто возникают как препятствия к задачам продолжения: см. подробности в следующем параграфе.

1.3.2. **Группы.** а. Для любого G-модуля M элементы $H^2(G, M)$ классифицируют расширения групп вида

$$1\to M\to\tilde{G}\to G\to 1,$$

где действие G на M сопряжением совпадает с исходным. Отношение эквивалентности расширений определяется, как в п. 1.2.4. По коциклу $a\in Z^2(G, M)$ группа $\tilde{G}$ строится как $M\times G$ с законом композиции

$$(m_1;\, g_1)\,(m_2;\, g_2) = (m_1+g_1m_2+a(g_1,\, g_2);\, g_1g_2).$$

В частности, если действие тривиально, $H^2(G, M)$ классифицирует центральные расширения. Отсюда видно, что $H^2(G, M)=0$, если G свободна.

б. Пусть, как в п. 1.2.2, G — конечная p-группа. Пусть $f: F\to G$ — сюръективный гомоморфизм, F — свободная группа, R — ядро f. Из спектральной последовательности Хохшильда—Серра находим точную последовательность

$$0\to H^1(G, \mathbf{Z}_p)\to H^1(F, \mathbf{Z}_p)\to H^1(R, \mathbf{Z}_p)^G\to H^2(G, \mathbf{Z}_p)\to 0.$$

Размерность $H^1(R, \mathbf{Z}_p)^G$ можно отождествить с минимальным числом элементов, порождающих R как нормальный делитель в G. Если число образующих F и G совпадает, то $H^1(R, \mathbf{Z}_p)^G$ изоморфна $H^2(G, \mathbf{Z}_p)$. Поэтому размерность $H^2(G, \mathbf{Z}_p)$ можно интерпретировать как минимальное число соотношений между минимальной системой образующих G.

в. Пусть G — группа Галуа расширения K поля k (сепарабельного над k). Тогда $H^2(G, K^*)$ — *группа Брауэра* $\mathrm{Br}(K/k)$ — классифицирует центральные простые конечномерные алгебры над полем k, распадающиеся над K. Любая такая алгебра, как известно, изоморфна $M(n, A)$, где A — тело над k с центром k; класс такой алгебры есть класс

A с точностью до изоморфизма. Чтобы построить алгебру по коциклу $a \in Z^2(G, K^*)$, достаточно рассмотреть случай конечной G. Тогда нужный класс реализуется алгеброй $\bigoplus_{g \in G} K\bar{g}$ с умножением

$$\bar{g}\bar{h} = a(g, h)\overline{gh}; \quad \bar{g}b = (gb)\bar{g}, \quad g, h \in G, \ b \in K.$$

Композиция в H^2 отвечает тензорному произведению алгебр.

1.3.4. Алгебры Ли. а. Для любого $\mathfrak{g}$-модуля M элементы $H^2(\mathfrak{g}, M)$ классифицируют расширения алгебр Ли вида

$$0 \to M \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0,$$

где M — абелев идеал в $\tilde{\mathfrak{g}}$ такой, что действие $\mathfrak{g}$ на M совпадает с исходным. По коциклу $a \in Z^2(\mathfrak{g}, M)$ алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ строится как $M \oplus \mathfrak{g}$ со скобкой

$$[(m_1, X_1), \ (m_2, X_2)] = (X_1 m_2 - X_2 m_1 + a(X_1, X_2), \ [X_1, X_2]).$$

При тривиальном действии $H^2(\mathfrak{g}, M)$ классифицирует центральные расширения.

В последние годы такие центральные расширения бесконечномерных алгебр Ли подробно изучались в связи с запросами теоретической физики. Ограничимся примером *алгебры Вирасоро*: это расширение алгебры лорановских полиномиальных векторных полей на прямой с помощью коцикла

$$a\left(f(t)\frac{d}{dt}, \ g(t)\frac{d}{dt}\right) = \operatorname{res}\left(f\frac{dg}{dt}\right)$$

б. Элементы $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ классифицируют инфинитезимальные деформации $\mathfrak{g}$, т. е. такие алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ над кольцом дуальных чисел $k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, что $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}/(\varepsilon\tilde{\mathfrak{g}})$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$ свободен как $k[\varepsilon]$-модуль.

§ 2. Препятствия, торсоры, характеристические классы

2.1. От локального к глобальному. В очень многих ситуациях классы когомологий появляются как препятствия к решению глобальной задачи, которая локально разрешима. Локальную разрешимость часто можно представить в виде условия сюръективности некоторого морфизма пучков $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ на топологическом пространстве X: таковы задачи Кузена, описанные в п. 1.2.1. Множество локальных решений задачи отвечает ядру этого морфизма, если $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ — пучки абелевых групп.

Обычную точную когомологическую последовательность, связанную с точной тройкой пучков абелевых групп $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \to 0$,

$$\ldots \to H^i(X, \mathcal{K}) \to H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(X, \mathcal{K}) \to \ldots$$

можно интерпретировать следующим образом:

а. Препятствием к подъему класса когомологий $c \in H^i(X, \mathscr{H})$ до класса $c' \in H^i(X, \mathscr{G})$ является класс когомологий $\delta(c) \in \in H^{i+1}(X, \mathscr{K})$: c' существует, если и только если $\delta(c)=0$. В частности, подъем существует, если $H^{i+1}(X, \mathscr{K})=0$.

б. Если препятствие обращается в нуль, то множество подъемов является однородным пространством над группой $H^i(X, \mathscr{K})$. В частности, подъем единствен, если $H^i(X, \mathscr{K})=0$.

Во многих классических задачах $i=0$, то есть нас интересует подъем сечений; с другой стороны, $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ могут не быть пучками абелевых групп, и эта простейшая схема подвергается некоторым изменениям. Разберем основные примеры.

2.2. Продолжения отображений: топологическая ситуация. Пусть $i: Y \to Y'$ — пара топологических пространств, $f: Y \to X$ — непрерывное отображение, и нас интересует задача построения непрерывного отображения $f': Y' \to X$, совпадающего с f на Y. Предположим, что Y — локальный деформационный ретракт Y'; тогда задача построения f' разрешима локально по Y; иными словами, отображение пучков множеств на Y'

$$\mathrm{Map}\,(Y', X) \to i_* \mathrm{Map}\,(Y, X)$$

сюръективно. Мы не можем построить препятствие к подъему f, или $f \circ i \in \Gamma(Y', i_* \mathrm{Map}\,(Y, X))$ по образцу п. 2.1 в общем случае, но на категории клеточных пространств имеется следующее ее видоизменение.

Пусть $Y = Y_{n-1}$, $Y' = Y_n$ — последовательные основы клеточного пространства Y. Предположим, что либо $n \geqslant 3$, либо $n=2$ и $\pi_1(X)$ — абелева группа. Построим по f коцепь $c^n(f) \in \in C^n(Y, \pi_{n-1}(X))$: значение $c^n(f)$ на клетке $e_n \subset Y$ есть гомотопический класс отображения $S^{n-1} \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{f} X$, где h — граница характеристического отображения e_n.

2.2.3. Теорема. а) $c^n = (f)$ есть коцикл; он равен нулю, если и только если f допускает продолжение $f: Y_n \to X$.

б) Пусть f', f'' — два продолжения f; тогда $c^{n+1}(f') - c^{n+1}(f'') \in B^{n+1}(Y, \pi_n(X))$, и все коциклы в классе когомологий f' реализуются подходящим f''.

Следствие. а) В прежних обозначениях ограничение f на Y_{n-2} продолжается до отображения $Y_n \to X$, если и только если класс когомологий $[c^n(f)] \in H^n(Y, \pi_{n-1}(X))$ равен нулю.

б) Множество гомотопических классов отображений $f': Y_{n-1} \to X$, совпадающих с f на Y_{n-2}, является однородным пространством над $B^{n+1}(Y, \pi_n(X))$.

Таким образом, переход к остовам и гомотопическим группам технически эквивалентен «частичной аделианизации» пучков отображений. В п. 2.5 мы приведем другой вариант, в категории комплексных пространств.

Теми же соображениями можно установить следующий важный результат о представимости функтора когомологий. Пусть π — абелева группа.

2.2.4. Теорема а. Существует такое клеточное пространство $K(\pi, n)$, что $H^n(X, \pi) = [X, K(\pi, n)]$ как функтор от объекта X гомотопической категории клеточных пространств.

б. Объект $K(\pi, n)$ этой категории однозначно с точностью до изоморфизма характеризуется свойствами $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$, $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$.

2.3. Торсоры. Если G некоммутативная группа, то можно определить *множество* $H^1(X, G)$; это — наиболее часто встречающийся в приложениях фрагмент теории некоммутативных когомологий. Сформулируем относящиеся сюда конструкции.

а. Пусть G — топологическая группа, X — топологическое пространство. Назовем главным G-расслоением над X, или *G-торсором*, набор следующих данных: непрерывное отображение $\pi : P \to X$; непрерывное действие $G \times P \to P$; $(g, p) \to gp$, такое, что $\pi(p) = \pi(gp)$ и локально по X отображение π изоморфно проекции $G \times U \to U$ с левыми сдвигами: $g(h, p) = (gh, p)$. Обозначим через $T(X, G)$ множество классов G-торсоров с точностью до изоморфизма.

б. Пусть P — некоторый G-торсор с локальной тривиализацией над элементами открытого покрытия $X = \bigcup_i U_i$. Пусть $e_i : U_i \to P$ — образ $\{\mathrm{id}\} \times U_i$ при выбранной тривиализации. Определим непрерывное отображение $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ из условия $e_i = g_{ij} e_j$ на $U_i \cap U_j$. Очевидно, $\{g_{ij}\}$ удовлетворяют уравнениям *некоммутативного коцикла*:

$$g_{ij} g_{ji} = 1, \; g_{jk} g_{ki} g_{ij} = 1.$$

Обозначим через $Z^1((U_i), G)$ множество всевозможных 1-коциклов покрытия (U_i).

При смене тривиализации $e_i' = h_i e_i$ коцикл $\{g_{ij}\}$ заменяется на *когомологичный* ему

$$g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}.$$

Обозначим через $H^1((U_i), G)$ фактормножество $Z^1((U_i), G)$ по этому отношению эквивалентности. Множества $Z^1((U_i), G)$ и $H^1((U_i), G)$ очевидным образом превращаются в индуктивную систему относительно измельчения покрытия. Положим $H^1(X, G) = \varinjlim H^1((U_i), G)$: это множество 1-когомологий пространства X со значениями в пучке ростков непрерывных отображений X в G.

2.3.1. Теорема. Естественное отображение $T(X, G) \to H^1(X, G)$ является биекцией.

В различных гомотопических категориях можно доказать, что $T(X, G)$, как функтор от X, представим некоторым пространством BG — классифицирующим пространством группы. В соединении с теоремой п. 2.3.1 это дает некоммутативный аналог теоремы о представимости п. 2.2.4. Например:

$$G = O(n), \quad BO(n) = \lim_{\overrightarrow{N}} \mathrm{Gr}(n, \mathbf{R}^N)$$

$$G = U(n), \quad BU(n) = \lim_{\overrightarrow{N}} \mathrm{Gr}(n, \mathbf{C}^N)$$

(Gr — грассманово многообразие линейных подпространств в соответствующем пространстве) и $H^1(X, \mathrm{G}) = [X, BG]$ для компактных хаусдорфовых пространств X.

2.4. Характеристические классы. Пусть G-торсор $P \in H^1(X, \mathrm{G})$ отвечает отображению $f: X \to BG$. Индуцированное отображение $f^*: H^*(BG) \to H^*(X)$ определено однозначно, то есть не зависит от выбора f в гомотопическом классе, отвечающем P (в качестве коэффициентов когомологий можно взять любую абелеву группу, обычно $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{R}$, или $\mathbf{C}$). Для классических групп Ли и в ряде аналогичных ситуаций кольца $H^*(BG)$ вычислены явно и имеют определяемые геометрически системы образующих $\{c_i(G),\ i \in]\}$. Классы $f^* c_i(G) \in H^*(X)$ называются в этом случае *характеристическими классами* торсора P.

2.5. Аналитические пространства. Другой вариант идеологии п. 2.2 полезен в комплексно-аналитической геометрии. Пусть Y' — аналитическое пространство, $Y \subset Y'$ — замкнутое аналитическое подпространство, определенное пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_{Y}$. Будем рассматривать случай, когда носители Y' и Y совпадают, то есть J состоит из нильпотентов. В этом случае Y' называется инфинитезимальным расширением Y. Как и в топологическом случае, мы может поставить несколько задач продолжения:

— продолжение на Y' морфизма аналитических пространств $Y \to X$;

— продолжение на Y' локально свободного пучка $\mathcal{E}$ (или G-торсора, где G — комплексная группа Ли);

— продолжение на $(Y', \mathcal{E}')$ класса когомологий $c \in H^i(Y, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — ограничение $\mathcal{E}'$ на Y.

Последняя задача решается, как в п. 2.1, с помощью точной последовательности

$$\ldots \to H^i(Y', J\mathcal{E}') \to H^i(Y', \mathcal{E}') \to H^i(Y, \mathcal{E}) \to H^{i+1}(Y, J\mathcal{E}') \to \ldots$$

Первые две задачи допускают аналогичную трактовку с помощью когомологических препятствий, если выполнены два условия:

а. $J^2 = 0$;

б. точна последовательность пучков $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to J \xrightarrow{d \otimes 1} \Omega^1 X \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1 Y \to 0.$$

Ограничимся следующей формулировкой.

2.5.1. Теорема. а. В описанных условиях для существования локально свободного продолжения $\mathscr{E}'$ пучка $\mathscr{E}$ на Y необходимо и достаточно, чтобы обращалось в нуль некоторое препятствие

$$\omega(\mathscr{E}) \in H^2(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes J)$$

(мы опустили явную конструкцию).

б. Если $\omega(\mathscr{E})=0$, то на множестве классов продолжений $\mathscr{E}$ транзитивно действует группа $H^1(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes J)$. Это действие эффективно, если существует такое продолжение $\mathscr{E}'$, что любое сечение $\operatorname{End}\mathscr{E}$ продолжено до сечения $\operatorname{End}\mathscr{E}'$.

Доказательство использует сюръекцию $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_{Y'}) \to \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_Y)$ и отрезок точной последовательности, который можно построить для некоммутативных когомологий. Теорема обобщается на G-торсоры для комплексных групп Ли.

2.6. Класс Атьи и характеристические классы в когомологиях Ходжа. Применим теорему п. 2.5.1 в следующей ситуации: Y — комплексное многообразие, Y' — первая окрестность диагонали в $Y\times Y$. Имеется естественный изоморфизм $J=\Omega^1 Y$. Пусть $\mathscr{E}'=p_1^*(\mathscr{E})$, $\mathscr{E}''=p_2^*(\mathscr{E})$, где $p_i: Y'\to Y$ индуцированы двумя проекциями. Так как $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$ имеют одинаковое ограничение на Y, в силу п. 2.5.1 определен их *разностный класс когомологий*

$$a(\mathscr{E}) \in H^1(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes\Omega^1 Y),$$

называемый *классом Атьи*. Можно определить умножение

$$H^p(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes\Omega^q Y)\times H^{p'}(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes\Omega^{q'} Y)\to$$
$$\to H^{p+p'}(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes\Omega^{q+q'} Y),$$

а также отображение следа

$$\mathrm{tr}\colon H^p(Y, \operatorname{End}\mathscr{E}\otimes\Omega^q Y)\to H^p(Y, \Omega^q Y).$$

Положим

$$e_p(\mathscr{E}) = \mathrm{tr}\, a(\mathscr{E})^p \in H^p(Y, \Omega^p Y).$$

Это — характеристические классы $\mathscr{E}$ со значениями в кольце когомологий Ходжа $\bigoplus_{p,q} H^p(Y, \Omega^q Y)$.

§ 3. Циклические (ко)гомологии

3.1. Циклические объекты. Напомним, что симплициальный объект категории C — это функтор $\Delta^0\to C$, где Δ — категория множеств $[n]=\{0, 1, \ldots, n\}$ с неубывающими отображениями в качестве морфизмов.

Следуя Конну, введем аналогично понятие *циклического объекта* как функтора $\Lambda^0\to C$, где циклическая категория Λ имеет объекты

$$\{n\}=\text{корни степени } n+1 \text{ из единицы;}$$

и морфизмы, описываемые любым из следующих трех эквивалентных способов. Обозначим через k корень $e^{2\pi ik/(n+1)}$ и введем на $\{n\}$ циклический порядок: $0<1<\ldots<n<0$.

Вариант 1. $\mathrm{Hom}(\{n\}, \{m\})$-множество гомотопических классов непрерывных циклически неубывающих отображений $\varphi: S^1\to S^1$ степени 1 (где $S^1=\{z| \ |z|=1\}$) таких, что $\varphi(\{n\})\subset\subset\{m\}$ (рассматриваются лишь гомотопии в классе таких отображений).

Вариант 2. Один морфизм $\{n\}\to\{m\}$ — это пара, состоящая из отображения $f=\{n\}\to\{m\}$ и набора полных порядков σ на всех прообразах $f^{-1}(i)$, $i\in\{m\}$. При этом циклический порядок на $\{n\}$, индуцированный циклическим порядком на $\{m\}$ и σ, должен совпадать с исходным циклическим порядком на $\{n\}$. Правило композиции: $(g,\tau)(f,\sigma)=(gf,\tau\sigma)$, где $i<j$ в смысле $\tau\sigma$, если либо $f(i)<f(j)$ в смысле τ, либо $f(i)=f(j)$ и $i<j$ в смысле σ.

Заметим, что для существования при данном $f:\{n\}\to\{m\}$ хотя бы одного набора полных порядков σ, удовлетворяющего сформулированному условию, необходимо и достаточно, чтобы f было циклически неубывающим: из условия $i<j<k<i$ в $\{n\}$ следует $f(i)\leqslant f(j)\leqslant f(k)\leqslant f(i)$ в $\{m\}$. Кроме того, σ однозначно определяются по f во всех случаях, когда f не постоянное отображение. Если же f постоянно, то σ можно выбрать $n+1$ способом.

Вариант 3. Морфизмы в Λ задаются образующими

$$\partial_n^i:\{n-1\}\to\{n\},\quad \sigma_n^i:\{n+1\}\to\{n\},\quad \tau_n:\{n\}\to\{n\}$$

и соотношениями:

$$\partial_n^j\partial_{n-1}^i=\partial_n^i\partial_{n-1}^{j-1}\quad \text{для}\quad i<j;$$

$$\sigma_n^j\sigma_{n+1}^i=\sigma_n^i\sigma_{n+1}^{j+1}\quad \text{для}\quad i\leqslant j;$$

$$\sigma_n^j\partial_{n+1}^i=\begin{cases}\partial_n^i\sigma_{n-1}^{j-1} & \text{для } i<j,\\ \mathrm{Id} & \text{для } i=j,\ j+1,\\ \partial_n^{i-1}\sigma_{n-1}^j & \text{для } i>j+1;\end{cases}$$

$$\tau_n\partial_n^i=\partial_n^{i-1}\tau_{n-1},\quad i=1,\ldots,n;$$

$$\tau_n\sigma_n^i=\sigma_n^{i-1}\tau_{n+1},\quad i=1,\ldots,n;$$

$$\tau_n^{n+1}=\mathrm{Id}.$$

Связь с предыдущим вариантом: ∂_n^i пропускает i; σ_n^i дважды принимает значение i; $\tau_n(j)=j+1$. Порядок на прообразах следует дополнительно указать лишь для σ_0^0: это $0<1$.

3.2. Автодуальность Λ. Поставим в соответствие морфизму $(f,\sigma):\{n\}\to\{m\}$ морфизм $(f,\sigma)^*=(g,\tau):\{m\}\to\{n\}$, где

$g(i)$ есть σ — минимальный элемент в $f^{-1}(j)$, где j —

максимальный в смысле циклического порядка элемент из $f(\{n\})$, меньший i.

Порядок τ следует доопределить, лишь когда g постоянно; это происходит в точности, когда f постоянно, и τ определяется тем, что образ f есть τ-наименьший элемент в $\{n\}$.

3.2.2. Лемма. Отображение $\{n\}\to\{n\}^0$, $(f,\sigma)\to(f,\sigma)^{*0}$ есть функтор, определяющий изоморфизм категорий $\Lambda\to\Lambda$.

3.3 Циклический комплекс. Пусть теперь E — циклический объект абелевой категории: $E=(E_n, d_i^n, s_i^n, t_n)$, где морфизмы d, s, t происходят из ∂, σ, τ. Положим

$$d^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^n : E_n\to E_{n-1};$$

$$d'^n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i^n : E_n\to E_{n-1};$$

$$t=(-1)^n t_n : E_n\to E_n;\quad N=\sum_{i=0}^{n} t^i.$$

Обозначим через $E.$ комплекс (E_n, d^n) и рассмотрим комплекс $(E_n/(1-t)E_n,\ d^n \operatorname{mod}(1-t))$. Корректность определения следует из того, что $d(1-t)=(1-t)d'$. Если умножение на $n+1$ является изоморфизмом E_n для всех n, положим, как в гл. 1, п. 2.11

$$H_.^{\lambda}(E)=HC_.(E)=H_.(E/(1-t)E).$$

В общем случае обозначим через $C.E$ комплекс, ассоциированный с бикомплексом

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d"'] & \vdots \arrow[d, "-d'"'] & \vdots \arrow[d, "d"'] & \\
E_2 & E_2 \arrow[l, "1-t"'] & E_2 \arrow[l, "N"'] & \ldots \arrow[l, "1-t"'] \\
E_1 \arrow[u, phantom] & E_1 \arrow[l, "1-t"'] & E_1 \arrow[l, "N"'] & \ldots \arrow[l, "1-t"'] \\
E_0 & E_0 \arrow[l, "1-t"'] & E_0 \arrow[l, "N"'] & \ldots \arrow[l, "1-t"']
\arrow[from=2-1, to=3-1, "d"'] \arrow[from=2-2, to=3-2, "-d'"'] \arrow[from=2-3, to=3-3, "d"']
\arrow[from=3-1, to=4-1] \arrow[from=3-2, to=4-2, "-d'"'] \arrow[from=3-3, to=4-3, "d"']
\end{tikzcd}$$

и положим $HC_.(E)=H(C.E)$. В условиях предыдущего абзаца строки этого бикомплекса точны во всех членах, кроме крайнего и новое определение сводится к предыдущему.

Коциклический объект определяется как функтор $E:\Lambda\to\mathscr{C}$. Предыдущие конструкции приводят к бикомплексу с формально обращенными стрелками, ассоциированному комплексу $C^{\cdot}E$ и циклическим когомологиям $HC^{\cdot}(E)$.

3.4. Циклические когомологии как производный функтор. Пусть $\mathscr{C}$ — категория абелевых групп или модулей над коммутативным кольцом k. Тогда в ней есть такой объект $\mathbf{1}$, что $\operatorname{Hom}(\mathbf{1}, A)=A$ для всех $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$. Именно: $\mathscr{C}=\mathscr{A}b$, $\mathbf{1}=\mathbf{Z}$, $\mathscr{C}=k\text{-mod}$, $\mathbf{1}=k$.

Будем рассматривать категорию $\Lambda\mathscr{C}$ коциклических объектов $\mathscr{C}$ как абелеву категорию. Обозначим через $\Lambda\mathbf{1}$ объект $\Lambda\mathscr{C}$, все компоненты которого суть $\mathbf{1}$, а все морфизмы тождественны.

3.4.1. Теорема. Для любого объекта $E \in \Lambda\mathscr{C}$ имеем:

$$HC^k(E)=\operatorname{Ext}^k_{\Lambda\mathscr{C}}(\Lambda\mathbf{1}, E).$$

Набросок доказательства. Обозначим через $L_{ik} \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ прямую сумму объектов $\mathbf{1}$, пронумерованных множеством $\operatorname{Hom}_\Lambda(\{i\}, \{k\})$. При фиксированном i мы можем рассматривать L_i с компонентами L_{ik} как объект из $\Lambda\mathscr{C}$: морфизму $\psi: \{k\} \to \{l\}$ отвечает отображение $\operatorname{Hom}_\Lambda(\{i\}, \{k\}) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(\{i\}, \{l\})$ на индексах прямых слагаемых L_{ik}, на самих прямых слагаемых $\mathbf{1}$ оно будет тождественным.

Аналогично, морфизму $\varphi: \{i\} \to \{j\}$ в Λ отвечает отображение $L(\varphi): L_j \to L_i$ коциклических объектов, благодаря чему мы можем построить двойной комплекс

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
{\scriptstyle L(d)}\downarrow & & {\scriptstyle -L(d')}\downarrow & & {\scriptstyle L(d)}\downarrow & & \\
L_1 & \xleftarrow{L(1-t)} & L_1 & \xleftarrow{L(N)} & L_0 & \leftarrow & \cdots \\
{\scriptstyle L(d)}\downarrow & & {\scriptstyle -L(d')}\downarrow & & {\scriptstyle L(d)}\downarrow & & \\
L_0 & \xleftarrow{L(1-t)} & L_0 & \xleftarrow{L(N)} & L_0 & \leftarrow & \cdots
\end{array}$$

Комплекс, ассоциированный с этим бикомплексом, есть резольвента объекта $\Lambda\mathbf{1}$ в категории $\Lambda\mathscr{C}$. Поскольку для любого коциклического объекта E имеем $\operatorname{Hom}_{\Lambda\mathscr{C}}(L_i, E)=E_i$, эта резольвента состоит из проективных объектов.

Вычисляя $\operatorname{Ext}^k_{\Lambda\mathscr{A}}(\Lambda\mathbf{1}, E)$ с ее помощью, мы приходим к комплексу, когомологии которого, по определению, суть $HC^k(E)$.

3.4.2. Замечания. а. Теорему п. 3.4.1 можно перенести на случай абстрактной абелевой категории, в которой существуют внутренние Hom диаграмм и объект $\mathbf{1}$.

б. Для циклических гомологий в k-mod имеется изоморфизм $HC_i(E)=\operatorname{Tor}_i^{k[\Lambda^0]}(\Lambda\mathbf{1}, E)$. Здесь $k[\Lambda^0]$ — полукольцо, порожденное морфизмами Λ^0 над k, а $\Lambda\mathbf{1}$ и E — модули над этим полукольцом, соответственно, правый и левый.

3.5. Связь с гомологиями Хохшильда. Пусть A — некоторая k-алгебра, $\mathbf{Q} \subset k$. Построим циклический объект A^c с i-й компонентой $A^{\otimes(i+1)}$ и морфизмами

$$d_i^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n)=a_0 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n, \quad 0 \leqslant i < n,$$

$$d_n^n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n)=a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1},$$

$$s_i^n(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=a_0\otimes\ldots\otimes a_i\otimes 1\otimes a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n,$$
$$t_n(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1}.$$

Крайний столбец ассоциированного с ним бикомплекса (см. п. 6.3) — это комплекс Хохшильда $C.(A, A)$ (см. гл. 1, п. 2.10). Обозначим весь бикомплекс через L, морфизм сдвига на две единицы вправо — через S; бикомплекс, состоящий из первых двух столбцов L и нулей на остальных местах — через K. Имеется точная последовательность

$$0\to K\to L\to L/K\to 0$$

и изоморфизмы $H.(\Delta K)=H.(A, A)$, $L\xrightarrow{S} L/K$. Переходя к комплексам, получаем следующий результат.

3.5.1. Теорема. Имеется точная последовательность:

$$\ldots\to H_n(A, A)\to HC_n(A)\xrightarrow{S} HC_{n-2}(A)\xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A, A)\to\ldots\ \blacksquare$$

Мы пишем $HC_n(A)$ вместо $HC_n(A^c)$ в соответствии с обозначениями в гл. 1, п. 2.10.

Для циклических когомологий аналогично получается точная последовательность

$$\ldots\to H^n(A, A^*)\to HC^{n-1}(A)\to HC^{n+1}(A)\to H^{n+1}(A, A^*)\to\ldots$$

3.6. Относительные циклические гомологии алгебр. Пусть k — поле характеристики нуль. Назовем *дифференциальной градуированной алгеброй* (д. г. а.) k-алгебру $R=\bigoplus_{n\in Z} R_n$ с $R_mR_n\subset\subset R_{m+n}$ и с дифференциалом $\partial: R_n\to R_{n-1}$, $\partial^r=0$, удовлетворяющим тождеству Лейбница $\partial(rs)=\partial r\cdot s+(-1)^{\deg r}r\cdot\partial s$. Морфизмы д. г. а. — это k-гомоморфизмы нулевой степени, коммутирующие с ∂.

Д. г. а. R называется *свободной*, если она изоморфна тензорной алгебре градуированного k-пространства (о дифференциале ничего не предполагается). Более общо, пусть $R_1\to R_2$ — морфизм д. г. а.; если он изоморфен каноническому морфизму $R_1\to R_1*S$, где S свободна, а $*$ означает амальгамирование, то R_2 называется свободной над R_1.

Категория ассоциативных k-алгебр вкладывается в категорию д. г. а., сосредоточенных в степени 0 с $\partial=0$.

Пусть $f: A\to B$ — гомоморфизм k-алгебр. Резольвентой B над A называется коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \overset{i}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A & & \\ & \underset{f}{\searrow} & B \end{array},$$

где R — свободная над A д. г. а., а π — сюръекция д. г. а., являющаяся квазиизоморфизмом. Резольвента существует для любого морфизма.

Рассмотрим резольвенту R как комплекс. В силу формулы Лейбница $[R, R]+i(A)$ является подкомплексом (здесь $[R, R]$ — линейная оболочка суперкоммутаторов $[r, s]=rs-(-1)^{\deg r \deg s}sr$). Положим

$$HC_n(A\to B)=H_{n+1}(R/([R, R]+i(A))).$$

3.6.1. Теорема. а. Описанная конструкция не зависит от выбора резольвенты и определяет ковариантный функтор на категории морфизмов A-алгебр.

б. Для любого коммутативного треугольника морфизмов A-алгебр.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

имеется естественная точная последовательность

$$\ldots \to HC_n(A\to B)\to HC_n(A\to C)\to HC_n(B\to C)\to HC_{n-1}(A\to B)\to\ldots$$

в. Имеется канонический изоморфизм $HC_n(A\to 0)=HC_n(A.)$ ■

3.7. Связь с когомологиями де Рама. Пусть k — поле характеристики 0, A — конечно порожденная коммутативная k-алгебра. A-модуль дифференциалов $\Omega^1 A$ (точнее, $\Omega^1 A/k$) определяется вместе с k-линейным отображением $d: A\to\Omega^1 A$, удовлетворяющим тождеству Лейбница, как универсальный объект. Алгебраический комплекс де Рама $\Omega^{\cdot} A$ есть $\Lambda^{\cdot}_A(\Omega^1 A)$; d продолжается на $\Omega^{\cdot} A$ с помощью обычных тождеств.

В случае, когда $k=\mathbf{C}$, A — кольцо полиномиальных функций на неособом аффинном алгебраическом многообразии V, когомологии $\Omega^{\cdot} A$ можно отождествить с $H^*(V, \mathbf{C})$. В общем случае это неверно, и для реконструкции $H^*(V, \mathbf{C})$ алгебраическими средствами следует привлечь комплекс де Рама объемлющего аффинного пространства.

Точнее, пусть B — алгебра многочленов над k, $B\to A$ — сюръекция, I — ее ядро, то есть идеал уравнений V как подсхемы в $\operatorname{Spec} B$. Расмотрим на $\Omega^{\cdot} B$ фильтрацию следующими подкомплексами:

$$F^n\Omega^j B=\begin{cases}\Omega^j B & \text{при } n\leqslant j,\\ I^{n-j}\Omega^j B & \text{при } n>j.\end{cases}$$

Положим

$$H^{\cdot}_{\mathrm{cris}}(A; n)=H^{\cdot}(\Omega^{\cdot} B/F^{n+1}\Omega^{\cdot} B).$$

При смене B эти группы не меняются.

Гротендик показал, что $H^{\cdot}(\varprojlim \Omega^{\cdot} B/F^{n+1}\Omega^{\cdot} B)$ изоморфны $H^{\cdot}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{C})$. Для вычисления $HC_n(A)$ нужны допредельные группы.

3.7.1. Теорема. а. Для всех n, i, $0 \leqslant 2i \leqslant n$ определены функториальные отображения

$$\chi_{n,i}: HC_n(A) \to H^{n-2i}_{\mathrm{cris}}(A; n-i)$$

такие, что следующие квадраты коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} HC_n(A) & \xrightarrow{\chi_{n,i}} & H^{n-2i}_{\mathrm{cris}}(A; n-i) \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{редукция}} \\ HC_{n-2}(A) & \xrightarrow{\chi_{n-2,i-1}} & H^{n-2i}_{\mathrm{cris}}(A; n-1-i) \end{array}$$

(S определено в п. 3.5).

б. Предположим, что существует такая сюръекция $B \to A$, что идеал уравнений I локально задается регулярной последовательностью. Тогда

$$\oplus \chi_{n,i}: HC_n(A) \to \bigoplus_{0 \leqslant 2i < n} H^{n-2i}_{\mathrm{cris}}(A; n-i)$$

является изоморфизмом. ■

3.7.2. Случай неособого спектра. Если $V = \operatorname{Spec} A$ — приведенная гладкая схема, то

$$H^n_{\mathrm{cris}}(A; m) = \begin{cases} H^n(\Omega^{\cdot} A) = H^n_{DR}(V) \text{ при } n < m, \\ \Omega^n A / d\Omega^{n-1} A \text{ при } n = m. \end{cases}$$

Поэтому

$$HC_n(A) \simeq \Omega^n A / d\Omega^{n-1} A \oplus \left(\bigoplus_{i \geqslant 1} H^{n-2i}_{DR}(V) \right).$$

3.8. Гомологии алгебры Ли бесконечных матриц. Для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем k пространство гомологий $H_{\cdot}(\mathfrak{g}, k)$ обладает коумножением $\Delta: H_{\cdot}(\mathfrak{g}, k) \to H_{\cdot}(\mathfrak{g}, k) \otimes H_{\cdot}(\mathfrak{g}, k)$. Оно индуцировано коумножением в цепях $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}) \to \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g})$: на 1-цепях последнее задается формулой $\xi \mapsto 1 \otimes \xi + \xi \otimes 1$ и затем однозначно продолжается до гомоморфизма k-алгебр. Это коумножение коассоциативно и суперкоммутативно относительно естественной $\mathbf{Z}_2$-градуировки.

Рассмотрим теперь ассоциативную алгебру A и обозначим через $\mathrm{gl}(A)$ алгебру Ли бесконечных финитных матриц над A вида (a_{ij}); $i, j \geqslant 1$. На $\mathrm{gl}(A)$ имеется операция прямого суммирования:

$$(a_{ij}) \oplus (b_{ij}) = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{i/2, j/2}, \text{ если } i, j \equiv 0 \bmod 2, \\ b_{(i+1)/2, (j+1)/2}, \text{ если } i, j \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Она индуцирует на $H.(\mathfrak{g}, k)$ суперкоммутативное ассоциативное умножение, совместимое с описанным выше коумножением в том смысле, что $H.(\mathfrak{g}, k)$ превращается в алгебру Хопфа.

Напомним, что элемент $x \in H.(\mathfrak{g}, k)$ называется *примитивным*, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Далее характеристика k равна нулю.

3.8.1. Теорема. Градуированная алгебра Хопфа с суперкоммутативным умножением и коумножением изоморфна симметрической алгебре пространства своих примитивных элементов.

3.8.2. Теорема. Пусть $\operatorname{Prim} H_n(\mathrm{gl}(A), k)$ — пространство примитивных элементов степени n. Имеется канонический изоморфизм

$$HC_{n-1}(A) = \operatorname{Prim} H_n(\mathrm{gl}(A), k). \qquad \blacksquare$$

Аналогично, $H^{\cdot}\mathrm{gl}(A), k)$ снабжается структурой алгебры Хопфа, и для неё справедлив двойственный факт.

3.8.3. Теорема. Имеется канонический изоморфизм

$$HC^{n-1}(A) = \operatorname{Prim} H^n(\mathrm{gl}(A), k). \qquad \blacksquare$$

3.8.4. Набросок доказательства теоремы 3.8.1. Доказательство разбивается на три шага.

а. Гомологии цепного комплекса $C.(\mathrm{gl}(n, A), k)$ совпадают с гомологиями комплекса коинвариантов $C'.(\mathrm{gl}(n, A), k)$ относительно присоединенного действия $\mathrm{gl}(n, k)$, поскольку последнее тривиально на гомологиях, а действие $\mathrm{gl}(n, k)$ на цепи вполне приводимо.

б. Вычисление $C'.(\mathrm{gl}(n, A), k)$ можно провести с помощью классической теоремы Г. Вейля. Ограничиваясь примитивными элементами $\operatorname{Prim} C'.(\mathrm{gl}(n, A), k)$, мы можем резюмировать ответ следующим образом. Рассмотрим отображение

$$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A\right) \Big/ \operatorname{Im}(1-t) \to C'.(\mathrm{gl}(n, A)), \quad n \geqslant m,$$

переводящее класс $r_1 \otimes \ldots \otimes r_m$ в класс $E_{12}r_1 \wedge E_{23}r_2 \wedge \ldots \wedge E_{m1}r_m$. Оно корректно определено и индуцирует изоморфизм

$$\left(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}} A\right) \Big/ \operatorname{Im}(1-t) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Prim} C'.(\mathrm{gl}(n, A)).$$

в. Определенный выше изоморфизм коммутирует с дифференциалами; в частности, дифференциал переводит примитивные элементы в примитивные.

г. Примитивные классы гомологий в $H.(\mathrm{gl}(A), k)$ представлены примитивными циклами из $C'.(\mathrm{gl}(n, A)$ для подходящих n.

3.9. Диэдральные гомологии. Аналог теоремы п. 3.8.2 можно установить для стабильных ортогональных и симплектических алгебр Ли, если заменить циклические гомологии на диэдральные. Мы ограничимся минимумом необходимых понятий.

а. Пусть A—k-алгебра с инволюцией $a \to a^*$:

$$a^{**}=a;\quad (\lambda a)^*=\lambda a^* \text{ для } \lambda\in k,\ a\in A;$$
$$(ab)^*=b^*a^*;\quad (a+b)^*=a^*+b^*.$$

Распространим ее действие на тензорную алгебру A, полагая

$$h(a_0\otimes \ldots \otimes a_n)=(-1)^{(n+1)(n+2)/2}a_n^*\otimes \ldots \otimes a_1^*\otimes a_0^*.$$

Действие t и h на $\otimes^{n+1}A$ порождает группу диэдра, t-инвариантная часть циклического комплекса $C^\lambda_\cdot(A)$ образует подкомплекс, гомологии которого обозначаются $HD_n(A)$.

3.10. Ортогональные и симплектические алгебры Ли. Пусть $\varepsilon=\pm 1$, t — транспонирование, $*$ — почленное применение инволюции к матрицам над A. Инволюция на $\mathrm{gl}(2n, A)$, определенная в точной записи формулой

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} U^{t*} & \varepsilon Y^{t*} \\ \varepsilon Z^{t*} & X^{t*}\end{pmatrix},$$

удовлетворяет тождеству $[B, C]^T=-[B^T, C^T]$. Поэтому

$$O_\varepsilon(n, A)=\{B\in \mathrm{gl}(2n, A)\,|\,B^T+B=0\}$$

является подалгеброй Ли. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем стабильные алгебры Ли $O_\varepsilon(A)$.

3.10.1. Теорема. Имеются канонические изоморфизмы

$$HD_{n-1}(A)=\mathrm{Prim}\, H_n(O_\varepsilon(A)).$$

§ 4. Некоммутативная дифференциальная геометрия

4.1. Циклы. Пусть X — компактное ориентированное дифференцируемое n-мерное многообразие, $\Omega^\cdot(X)$ — его комплекс де Рама, $\int\colon \Omega^n\to\mathbf{R}$ — линейный оператор интегрирования форм объема. Алгебраические свойства тройки $(\Omega^\cdot, d, \int)$ кодируют значительную часть топологических свойств X; если вдобавок рассматривать ее функториальные свойства, можно получить еще больше информации о топологии и геометрии.

А. Конн предложил рассматривать некоммутативную версию $(\Omega^\cdot, d, \int)$ как базисное понятие «некоммутативной дифференциальной геометрии» и обнаружил важную роль циклических (ко)гомологий в этой теории. Ниже изложена часть его результатов.

4.1.1. Определение. *n-мерным циклом* называется тройка $(\Omega, d, \int)$, где $\Omega=\bigoplus_{j=0}^{n}\Omega^j$ — градуированная $\mathbf{C}$-алгебра, d—ее градуированное дифференцирование степени 1 с $d^2=0$ и $\int\colon\Omega^n\to\mathbf{C}$ — линейный функционал со свойствами

$$\int d\omega = 0 \quad (\omega \in \Omega^{n-1}),$$

$$\int \omega\omega' = (-1)^{\deg\omega \cdot \deg\omega'} \int \omega'\omega$$

(то есть замкнутый градуированный функционал следа).

4.1.2. **Примеры.** а. Пусть A — любая $\mathbf{C}$-алгебра, $\mathrm{tr}: A \to \mathbf{C}$ — линейный функционал с $\mathrm{tr}([a, b]) = 0$. Положим $\Omega^0 = A$, $\Omega^i = \{0\}$ при $i \geqslant 1$, $d = 0$, $\int = \mathrm{tr}$. Получим 0-мерный цикл.

б. Пусть X — n-мерное компактное дифференцируемое многообразие, C — q-мерный замкнутый поток на X, $q \leqslant n$. Положим $\Omega = \bigoplus_{i=0}^{q} \Omega^i(X)$, $\int \omega = \langle C, \omega \rangle$ для $\omega \in \Omega^q$. Получим q-мерный цикл.

в. Если $(\Omega, d, \int)$ — цикл, то $(\Omega, d, -\int)$ называется циклом с противоположной ориентацией. Очевидным образом определяется прямая сумма циклов.

Следующий пример показывает возникновение циклов в функциональном анализе.

4.2. **Фредгольмовы модули.** Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathscr{L}(H)$ — алгебра ограниченных операторов, $\mathscr{L}^\infty(H)$ — идеал компактных операторов. Пусть $\mu_n(T)$ (для $T \in \mathscr{L}^\infty(H)$) — n-е сингулярное число T (то есть n-е собственное значение $|T| = (T^*T)^{1/2}$). Положим для $1 \leqslant p < \infty$

$$\mathscr{L}^p(H) = \left\{ T \in \mathscr{L}^\infty(H) \,\middle|\, \sum_n \mu_n(T)^p < \infty \right\}.$$

Это — двусторонние идеалы в $\mathscr{L}(H)$, называемые *идеалами Шаттена*. Эквивалентное определение:

$$\mathscr{L}^p(H) = \{T \in \mathscr{L}(H) \,|\, \mathrm{Trace}\, |T|^p < \infty\},$$

где $\mathrm{Trace}\, T = \Sigma \langle T\xi_n, \xi_n \rangle$, $\{\xi_n\}$ — ортонормированный базис H. Мы будем рассматривать на $\mathscr{L}^p(H)$ топологию, определяемую нормой $\|T\|_p = (\Sigma \mu_n(T)^p)^{1/p}$.

4.2.1. Определение. Пусть A — некоторая $\mathbf{C}$-алгебра (не обязательно коммутативная). *n-суммируемым фредгольмовым A-модулем* называется $\mathbf{Z}_2$-градуированный левый A-модуль $H = H_0 \oplus H_1$ с нечетным $\mathbf{C}$-линейным отображением $F: H \to H$, удовлетворяющий условиям:

а) H является гильбертовым пространством, и операторы умножения на элементы A ограничены;

б) F ограничен, $F^2 = 1$ и $[F, a] \overset{\mathrm{df}}{=} Fa - aF \in \mathscr{L}^n(H)$ для всех $a \in A$. ■

4.3. **Цикл, связанный с фредгольмовым модулем.** Пусть H — n-суммируемый A-модуль. Положим $\Omega^0 = A$, Ω^q — замкнутая линейная оболочка в $\mathscr{L}^{n/q}(H)$ операторов $(a^0 + \lambda \cdot 1)[F, a^1]\,[F, a^2] \ldots [F, a^q]$, где $a^i \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Определим $d: \Omega^0 \to \Omega^1$ формулой $da = i[F, a]$. Можно проверить, что d однозначно продолжается до градуированного непрерывного дифференциала на $\Omega=\bigoplus_{j=0}^{n}\Omega^j$ (с умножением $\Omega^j\times\Omega^k\to\Omega^{j+k}$, задаваемым композицией операторов): это продолжение задается той же формулой $d\omega=i[F,\omega]$. Наконец, для $\omega\in\Omega^n$ положим

$$\int\omega=(-1)^{\deg\omega}\operatorname{Trace}\omega.$$

Конструкция этого примера допускает следующий абстрактно-алгебраический вариант.

4.4. Универсальная алгебра дифференциальных форм. Пусть A — произвольная ассоциативная $\mathbf{C}$-алгебра, с единицей или без. Рассмотрим категорию гомоморфизмов колец $f: A\to\Omega^0$, где $(\Omega^0=\bigotimes_{i\geqslant 0}\Omega^i, d)$ — градуированная алгебра с дифференциалом и единицей, $d^2=0$. Мы *не предполагаем,* что f переводит единицу в A (если она есть) в единицу из Ω^0.

В категории таких гомоморфизмов есть универсальный (начальный) объект $\Omega^0(A)$. Вот его прямая конструкция.

а. $\Omega^0=\tilde{A}=A\oplus\mathbf{C}\mathbf{1}$ — результат присоединения $\mathbf{1}$ к A.

б. $\Omega^n=\tilde{A}\otimes A^{\otimes n}$ (тензорные произведения над $\mathbf{C}$).

в. $d((a^0+\lambda\mathbf{1})\otimes a^1\otimes\ldots\otimes a^n)=\mathbf{1}\otimes a^0\otimes a^1\otimes\ldots\otimes a^n$; в частности, $da=\mathbf{1}\otimes a$ для $a\in A$.

г. Умножение $\Omega^m\otimes\Omega^n\to\Omega^{m+n}$ однозначно определяется условием, чтобы выполнялась формула Лейбница (и левое умножение на $\Omega^0=\tilde{A}$ было обычным). Пример: $\tilde{a}^0=a^0+\lambda\mathbf{1}$, $\tilde{b}^0=b^0+\mu\mathbf{1}$,

$$(\tilde{a}^0\otimes a^1)(\tilde{b}^0\otimes b^1)=(\tilde{a}^0da^1)(\tilde{b}^0db^1)=\tilde{a}^0(da^1\tilde{b}^0)\,db^1=$$

$$=\tilde{a}^0[d(a^1\tilde{b}^0)-a^1d\tilde{b}^0]\,db^1=\tilde{a}^0d(a^1\tilde{b}^0)\,db^1-(\tilde{a}^0a^1)\,db^0db^1=$$

$$=\tilde{a}^0\otimes a^1\tilde{b}^0\otimes b^1-\tilde{a}^0a^1\otimes b^0\otimes b^1.$$

Общая формула для правого действия A:

$$(\tilde{a}^0\otimes a^1\otimes\ldots\otimes a^n)\,b=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\tilde{a}^0\otimes\ldots\otimes a^ja^{j+1}\otimes\ldots\otimes b.$$

4.5. Циклы $(\Omega^{<q}(A), d, \int)$. Пусть $\Omega^{\cdot}(A)$ — алгебра, построенная в п. 4.4. Положим $\Omega^{<q}(A)=\bigotimes_{j=0}^{q}\Omega^j(A)$. Если задан линейный функционал $\int:\Omega^q(A)\to\mathbf{C}$, превращающий $\Omega^{<q}(A)$ в цикл, определим $\tau: A^{\otimes q}\to A^*$ формулой

$$\tau(a^1\otimes\ldots\otimes a^q)(a^0)=\int a^0da^1\ldots da^q.$$

4.5.1. Теорема. Описанная конструкция определяет биекцию между замкнутыми градуированными следами на $\Omega^q(A)$ и циклическими q-коциклами (см. гл. 1, п. 2. 11) алгебры A.

Более общо, *q-циклом* над алгеброй A называется пара, состоящая из цикла $(\Omega, d, \int)$ и гомоморфизма $\rho\colon A\to\Omega^0$. Функционал τ, определенный формулой

$$\tau(a^1,\ldots,a^q)(a^0)=\int\rho(a^0)\,d(\rho(a^1))\ldots d(\rho(a^q)),$$

называется характером этого цикла. Из универсального свойства $\Omega^{\cdot}(A)$ следует, что любой характер τ индуцирован циклическим коциклом.

Опишем некоммутативные версии двух дифференциально-геометрических понятий: кобордизма и связности.

4.6. Кобордизм. $(n+1)$-*цепью* называется тройка $(\Omega, d\Omega, \int)$, в которой:

а. $\Omega=\bigoplus_{i=0}^{n+1}\Omega^i$, $\partial\Omega=\bigoplus_{i=0}^{n}(\partial\Omega)^i$ — дифференциальные градуированные алгебры, связанные сюръективным морфизмом $r\colon\Omega\to\partial\Omega$ степени 0.

б. $\int\colon\Omega^{n+1}\to\mathbf{C}$ — след, удовлетворяющий условию

$$\int d\omega=0,\ \text{если}\ r(\omega)=0.$$

Границей этой цепи называется n-цикл $\left(\partial\Omega, d, \int'\right)$, где $\int'\omega'=\int d\omega$, если $r(\omega)=\omega'$.

4.6.1. Определение. Циклы Ω', Ω'' называются *кобордантными*, если существует цепь с границей $\Omega'\oplus\widetilde{\Omega}''$, где $\widetilde{\Omega}''$ — цикл Ω'' с обращенной ориентацией.

Аналогично определяется кобордантность циклов над алгеброй A: цепь и все гомоморфизмы должны рассматриваться над A.

4.6.2. Лемма. Отношение кобордантности есть отношение эквивалентности.

4.6.3. Теорема. Пусть Ω', Ω'' — два n-цикла над A, τ', τ'' — их характеры. *Пусть* $B\colon H^{n+1}(A, A^*)\to HC^n(A)$ — морфизм, описанный в п. 3.5. *Тогда* Ω, Ω'' кобордантны, если и только если разность классов циклических когомологий их характеров лежит в $\operatorname{Im}B$.

4.7. Связности. Пусть $\rho\colon A\to\Omega$ — некоторый цикл над A, E — проективный правый A-модуль конечного ранга. Связностью на E называется $\mathbf{C}$-линейное отображение $\nabla\colon E\to E\otimes_A\Omega^1$ со свойством

$$\nabla(ea)=(\nabla e)\,a+a\otimes d(\rho(a)),\quad e\in E,\ a\in A.$$

Будем предполагать, что A — алгебра с единицей.

Положим $\widetilde{E}=E\otimes_A\Omega$. Распространим ∇ на $\widetilde{E}$ формулой $\nabla(e\otimes\omega)=(\nabla e)\,\omega+e\otimes d\omega$. Рассмотрим градуированную $\operatorname{End}_A(E)$-алгебру $\operatorname{End}_\Omega(\widetilde{E})$. Положим для $T\in\operatorname{End}_\Omega(\widetilde{E})$

$$\delta(T)=\nabla T-(-1)^{\deg T}T\nabla.$$

Определим функционал следа на $\mathrm{End}_\Omega(\widetilde{E})^n$ как комбинацию $\int:\Omega^n\to\mathbf{C}$ и матричного следа. Тройка $\left(\mathrm{End}_\Omega(\widetilde{E}),\ \delta,\ \int\right)$ не является $\mathrm{End}_A(E)$-циклом по единственной причине: $\delta^2\neq 0$. Точнее, ∇^2 на $\widetilde{E}$ есть умножение на некоммутативную форму кривизны θ, и можно проверить, что

$$\delta^2 T=\theta T-T\theta$$

для всех $T\in\mathrm{End}_\Omega(\widetilde{E})$.

Следующая конструкция аксиоматизирует эту ситуацию и позволяет исправить описанную тройку, превратив ее в цикл.

Пусть $\left(\Xi,\ \delta,\ \theta,\ \int\right)$ — объект, состоящий из градуированной алгебры $\Xi=\bigoplus_{i=0}^{n}\Xi^j$ с дифференцированием δ степени 1, замкнутого следа $\int$ и элемента $\theta\in\Xi^2$ такого, что $\delta\theta\int=0$ и $\delta T=[\theta,T]$ для всех $T\in\Xi$.

Присоединим к Ξ элемент X степени 1 с соотношениями $X^2=\theta$, $\omega_1X\omega_2=0$ для всех $\omega_i\in\Xi$.

Пусть $\Omega'=\Xi[X]$. Определим d^1 и $\int^1$ формулами:

$$d^1\omega=\delta(\omega)+X\omega-(-1)^{\deg\omega}\omega X \text{ для } \omega\in\Xi;$$
$$d^1X=0,$$
$$\int'(\omega_{11}+\omega_{12}X+X\omega_{21}+X\omega_{22}X)=\int\omega_{11}-(-1)^{\deg\omega_{11}}\int\omega_{22}\theta,$$

где $\deg\omega_{11}=n=\deg\omega_{12}+1=\deg\omega_{21}+1=\deg\omega_{22}+2$.

4.7.1. Лемма. $(\Omega',\ d',\ \int')$ есть цикл.

Применим эту конструкцию к $(\mathrm{End}_\Omega(\widetilde{E}),\ \delta,\ \theta,\ \int)$. В результате, мы поставили в соответствие паре (проективный A-модуль E, цикл над A) некоторый цикл над $\mathrm{End}_A(E)$, зависящий от связности. Оказывается, что его характер зависит лишь от класса E в $K_0(A)$ и характера исходного цикла. Кроме того, $H_\lambda^{\cdot}(\mathrm{End}_A(E))$ канонически изоморфно $H_\lambda^{\cdot}(A)$.

4.7.2. Теорема. Описанная конструкция определяет биаддитивное умножение $K_0(A)\times H_\lambda^{\cdot}(A)\to H_\lambda^{\cdot}(A)$, превращающее $H_\lambda^{\cdot}(A)$ в $K_0(A)$-модуль в случае, когда A — коммутативное кольцо.

§ 5. (Ко)гомологии дискретных групп

5.1. Топологическое определение когомологий групп. Пусть группа G действует на топологическом пространстве X. Обозначим через Y пространство $G\diagdown X$ орбит G (снабженное фактортопологией) и через $\pi: X\to Y$ — проекцию.

5.1.1. Теорема. Предположим, что X стягиваемо, π является расслоением и G действует на X свободно. Тогда для любой абелевой группы A имеем $H^n(G, A) = H^n(Y, A)$, $H_n(G, A) = H_n(Y, A)$ (где A рассматривается как тривиальный G-модуль).

Доказательство основано на том, что в условиях теоремы комплекс

$$\ldots \to S_1(X) \to S_0(X) \to \mathbf{Z} \to 0$$

сингулярных цепей пространства X является резольвентой $\mathbf{Z}$, состоящей из свободных $\mathbf{Z}[G]$-модулей и группы $S_n(X)^G$ G-инвариантных элементов $S_n(X)$ изоморфна $S_n(Y)$.

Отметим еще, что в условиях теоремы имеем $\pi_1(Y) = G$; $\pi_i(Y) = 0$ при $i \geqslant 2$, то есть Y является $K(G, 1)$-пространством. Поскольку все такие пространства гомотопически эквивалентны, и, в частности, имеют одинаковые (ко)гомологии, теорема п. 5.1.1 дает топологический способ вычисления $H^*(G, A)$ и $H^*(G, A)$, коль скоро мы имеем какую-либо конструкцию $K(G, 1)$-пространства. Например, геометрическая реализация классифицирующего пространства BG (см. гл. 1, п. 2.7) является таковым, что оправдывает наше исходное определение. Экономный цепной комплекс можно иногда получать из следующей конструкции.

Пусть X — клеточное разбиение, на которое действует группа G, переставляя клетки (с сохранением ориентации). Очевидно, это действие продолжается на цепи.

5.1.2. Предложение. Если действие G на клетках X свободно и X стягиваемо, то цепной комплекс

$$\ldots \to C_n(X) \to C_{n-1}(X) \to \ldots \to C_0(X)$$

является свободной резольвентой $\mathbf{Z}[G]$-модуля $\mathbf{Z}$ (отображение аугментации $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbf{Z}$ имеет вид $\varepsilon(e) = 1$ для любой 0-мерной клетки e).

Поскольку для G-модуля F имеем

$$H^n(G, F) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, F), \quad H_n(G, F) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, F),$$

эта резольвента вычисляет (ко)гомологии G-модулей. Приведем некоторые конкретные результаты.

5.2. Свободная группа. Букет $B(I)$ семейства окружностей, занумерованного множеством I, есть $K(F(I), 1)$ где $F(I)$ — свободная группа, порожденная I. Следовательно,

$$H_n(F(I), \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ при } n = 0, \\ F(I)/[F(I), F(I)] \text{ при } n = 1, \\ 0 \text{ при } n > 1. \end{cases}$$

5.3. Группы с одним соотношением. Пусть $F(I)$ — свободная группа, $r \in F(I)$, N — минимальный нормальный делитель, содержащий r, $G = F(I)/N$. Элемент r определяет отображение $\rho : S^1 \to B(I)$, для которого r есть класс $\rho(S^1)$ в $\pi_1(B(I)) = F(I)$. Приклеим 2-клетку к $B(I)$ с помощью ρ и обозначим результат через Y.

5.3.1. Теорема. Если $r \neq s^n$ для $s \in F(I)$, $n \geqslant 2$, то Y есть $K(G, 1)$-пространство.

Отсюда получаем, что при выполнении этого условия

$$H_n(G, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ при } n=0, \\ F(I)/[F(I), F(I)] \text{ при } n=1, \\ 0 \text{ при } n \geqslant 3 \end{cases}$$

и

$$H_2(G, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, \text{ если } r \in [F(I), F(I)], \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, этот результат применим к фундаментальной группе компактной ориентируемой поверхности рода $g \geqslant 1$, для которой $I = \{1, \ldots, 2g\}$, $r = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}$.

5.4. Абелевы группы. а) Для $G = \mathbf{Z}^n$ с действием сдвигами на $\mathbf{R}^n = E$, получаем n-тор $(S^1)^n$ в качестве $K(G, 1)$. Отсюда

$$H_\cdot(G, \mathbf{Z}) = \Lambda^\cdot_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}^n).$$

б. Для $G = \mathbf{Z}_2$, действующей отражением на $S^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$, получаем $K(\mathbf{Z}_2, 1) = \mathbf{RP}^\infty$ и $H_{2i+1}(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$, $H_0(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, $H_{2i}(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}) = 0$ при $i \geqslant 1$. Рассматривая действие циклической группы $\mathbf{Z}_n = \{t^i\}$ на окружность, разбитую на n отрезков, получаем сначала ацикличный комплекс $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n]$-модулей

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n] \xrightarrow{t-1} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n] \to \mathbf{Z} \to 0,$$
$$1 \mapsto N = \Sigma t^i$$

откуда получается бесконечная резольвента $\mathbf{Z}$:

$$\ldots \to \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n] \xrightarrow{N} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n] \xrightarrow{t-1} \mathbf{Z}[\mathbf{Z}_n] \to \ldots$$

и

$$H_i(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{для } i=0, \\ \mathbf{Z}_n & \text{для } i \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 & \text{для } i \equiv 0 \bmod 2,\ i \geqslant 2. \end{cases}$$

5.5. Амальгамы и последовательность Майера—Вьеториса. Рассмотрим диаграмму гомоморфизмов групп $G_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} G_2$. Она вкладывается в кодекартов квадрат в категории групп, который определяет амальгаму $G_1 \underset{A}{*} G_2$.

5.5.1. Теорема. Любой кодекартов квадрат групп, в котором α_1, α_2 — вложения, изоморфен диаграмме фундаментальных групп квадрата $K(\cdot, 1)$ — пространств вида

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 = Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X_2 \arrow[d, hook] \\ X_1 \arrow[r, hook] & X_1 \sqcup_Y X_2 \end{tikzcd}$$

5.5.2. Следствие. Из последовательности Майера—Вьеториса для квадрата $K(\cdot, 1)$-пространств следует точная последовательность

$$\ldots \to H_n(A, \mathbf{Z}) \to H_n(C_1, \mathbf{Z}) \oplus H_n(G_2, \mathbf{Z}) \to H_n(G_1 * G_2, \mathbf{Z}) \to$$
$$\to H_{n-1}(A, \mathbf{Z}) \to \ldots$$

5.5.3. Пример. $PSL(2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_3$ $\left(\text{образующие } s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\right.$ $\left. t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Пользуясь последовательностью Майера — Вьеториса, находим

$$H_i(PSL(2, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ для } i = 0, \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3 \text{ для } i \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 \text{ для } i \equiv 0 \bmod 2, \ i \geqslant 2. \end{cases}$$

То же представление дает $SL(2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_4 \underset{\mathbf{Z}_2}{*} \mathbf{Z}_6$ и

$$H_i(SL(2, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ для } i = 0, \\ \mathbf{Z}_{12} \text{ для } i \equiv 1 \bmod 2, \\ 0 \text{ для } i \equiv 0 \bmod 2; \ i \geqslant 2. \end{cases}$$

5.6. Дискретные подгруппы групп Ли. (Ко)гомологии группы $SL(2, \mathbf{Z})$ можно вычислять другим методом, который допускает далекое обобщение. Он основан на следующем факте.

5.6.1. Теорема. Пусть G — связная группа Ли. Тогда ее максимальные компактные подгруппы $K \subset G$ сопряжены, и однородное пространство $E = G/K$ диффеоморфно $\mathbf{R}^d$.

5.6.2. Следствие. Пусть $\Gamma \subset G$ — дискретная подгруппа без кручения. Тогда $\Gamma \backslash E = \Gamma \backslash G/K$ есть $K(\Gamma, 1)$-пространство и, следовательно,

$$H_\bullet(\Gamma, \mathbf{Z}) = H_\bullet(\Gamma \backslash E). \ \blacksquare$$

Отсутствие кручения используется в проверке того, что Γ действует на E свободно; при наличии кручения это, вообще говоря, неверно. Из-за этого условия следствие неприменимо к $SL(n, \mathbf{Z})$. Однако его можно применить в подгруппе конечного индекса

$$\Gamma(N) = \{g \in SL(n, \mathbf{Z}) \mid g \equiv 1 \bmod N\}, \ N \geqslant 3.$$

Чтобы сформулировать качественные результаты, определим два свойства конечности группы Γ.

5.7. Условия конечности. а) *Когомологической размерностью* абстрактной группы Γ называется величина

$$cd\,\Gamma = \operatorname{proj}\dim_{\mathbf{Z}[\Gamma]}\mathbf{Z} = \inf\{n \mid H^i(\Gamma, M) = 0 \text{ для всех } i > n \text{ и } M\}.$$

б) Γ называется *группой FL-типа*, если **Z** имеет резольвенту конечной длины, состоящую из свободных **Z**[Γ]-модулей конечного ранга.

Ясно, что если Γ свободно действует на d-мерном стягиваемом пространстве, то $\mathrm{cd}\,\Gamma \leqslant d$. Применим этот результат к дискретной подгруппе без кручения $\Gamma \subset SL(n, \mathbf{R})$. Пространство теоремы п. 5.6.1 имеет вид

$$E = SL(n, \mathbf{R})/SO(n, \mathbf{R}) =$$

$$= \{\text{положительные квадратичные формы ранга } n\}/\mathbf{R}^*_+.$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{cd}\,\Gamma \leqslant n(n+1)/2 - 1.$$

В действительности, справедлив более точный результат.

5.7.1. Теорема. Пусть $\Gamma \subset SL(n, \mathbf{Z})$ — подгруппа конечного индекса без кручения. Тогда она имеет FL-тип

$$\mathrm{cd}\,\Gamma = n(n-1)/2. \blacksquare$$

Доказательство основано на том, что E/Γ гомотопически эквивалентно $n(n-1)/2$-мерному конечному клеточному разбиению. Последнее строится явно геометрическими средствами.

5.8. Двойственность. Пусть Γ — абстрактная группа. Назовем правый Γ-модуль D *дуализирующим* (в размерности n), если существуют изоморфизмы функторов от M во всех размерностях i, совместимые с точными последовательностями (ко)гомологий

$$H^i(\Gamma, M) \simeq H_{n-i}(\Gamma, D \otimes_{\mathbf{Z}} M),$$

где $g(d \otimes m) = dg^{-1} \otimes gm$ для $g \in \Gamma$, $d \in D$, $m \in M$.

5.8.1. Теорема. Предположим, что **Z** имеет над **Z**[Γ] конечную проективную резольвенту из модулей конечного типа. Тогда Γ допускает дуализирующий модуль в размерности n, если и только если $H^i(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) = 0$ при $i \neq n$ и $H^n(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$ — свободная абелева группа. В этом случае $n = \mathrm{cd}\,\Gamma$ и $D = H^n(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$. ■

5.8.2. Теорема. Пусть K(Γ, 1)-пространство Y является компактным d-мерным многообразием. Пусть $\tilde{Y}$ — его универсальное накрытие. Пусть $\varepsilon(g) = 1$, если $g \in \Gamma$ не меняет ориентацию $\tilde{Y}$ и $\varepsilon(g) = -1$ в противном случае. Тогда Γ-модуль $D = \mathbf{Z}$ с действием $g \cdot 1 = \varepsilon(g)$ является дуализирующим в размерности d.

5.9. Эйлерова характеристика. Пусть Γ — группа без кручения с $\mathrm{cd}\,\Gamma < \infty$ и $\mathrm{rk}_{\mathbf{Z}} H_i(\Gamma, \mathbf{Z}) < \infty$. Положим

$$\chi(\Gamma) = \sum_i (-1)^i \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}} H_i(\Gamma, \mathbf{Z}).$$

Если Γ — подгруппа конечного индекса с таким свойством в группе Γ', положим

$$\chi(\Gamma') = \frac{1}{[\Gamma' : \Gamma]} \chi(\Gamma).$$

5.9.1. Теорема. Эйлерова характеристика $\chi(\Gamma')$ определена корректно, то есть не зависит от выбора $\Gamma \subset \Gamma'$.

5.9.2. Примеры. а. $\chi(F(I)) = 1 - |I|$, где $F(I)$ — свободная группа, порожденная множеством I.

б. $\chi(SL(2, \mathbf{Z})) = -1/12$.

в. $\chi(\Gamma) = 1/|\Gamma|$, если Γ конечна.

г. Если $1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma'' \to 1$ точна и Γ имеет подгруппу конечного индекса без кручения, то $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma')\chi(\Gamma'')$.

д. Если $\Gamma = \Gamma_1 \underset{A}{*} \Gamma_2$ и Γ имеет подгруппу конечного индекса без кручения, то $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_1) + \chi(\Gamma_2) - \chi(A)$.

Топологический метод вычисления $\chi(\Gamma)$ основан на следующем результате. Пусть X — клеточное разбиение, на котором определено действие Γ со следующими свойствами: а) стационарные подгруппы всех клеток Γ_e имеют эйлеровы характеристики; б) действие Γ на клетках имеет конечное число орбит. Положим

$$\chi_\Gamma(X) = \sum_e (-1)^{\dim e} \chi(\Gamma_e),$$

где суммирование будет по представителям орбит.

5.9.3. Теорема. В описанной ситуации пусть X стягиваемо и Γ имеет подгруппу конечного индекса без кручения. Тогда $\chi(\Gamma)$ определена и совпадает с $\chi_\Gamma(X)$.

5.10. Эйлерова характеристика арифметических групп. Применив теорему 5.9.3 к случаю, когда Γ действует на X свободно, получим $\chi(\Gamma) = \chi(X/\Gamma)$. Предположим, что $X/\Gamma = Y$ — компактное дифференцируемое многообразие. Из дифференциальной геометрии известно, что по любой римановой метрике на Y можно построить форму объема d_μ на Y — форму Гаусса—Бонне этой метрики, полином от тензора кривизны, — со свойством

$$\chi(Y) = \int_Y d_\mu = \mu(Y).$$

Прямому приложению этого результата к дискретным арифметическим подгруппам $\Gamma \subset G$ групп Ли с помощью п. 5.6.1 мешает то обстоятельство, что $\Gamma \setminus G/K$ обычно не компактно, хотя имеет конечный инвариантный объем. Хардер показал, что этого достаточно.

5.10.1. Теорема. Пусть G — полупростая алгебраическая группа над $\mathbf{Q}$, $\Gamma \subset G(\mathbf{Q})$ — арифметическая подгруппа без кручения, $K \subset G(\mathbf{R})$ — максимальная компактная подгруппа, $X = G(\mathbf{R})/K$, d_μ — форма Гаусса—Бонне $G(\mathbf{R})$-инвариантной метрики. Тогда

$$\chi(\Gamma)=\mu(\Gamma\setminus X). \blacksquare$$

Вычисление меры справа можно интерпретировать как вычисление объема фундаментальной области. Оно было проделано, например, для всех групп Шевалле, со следующими результатами. Ниже $\zeta(s)$ означает дзета-функцию Римана.

5.10.2. Примеры. а) Имеем

$$\chi(SL(n, \mathbf{Z}))=\prod_{k=2}^{n}\zeta(1-k)=\begin{cases}-1/12 \text{ для } n=2,\\ 0 \text{ для } n\geqslant 3.\end{cases}$$

б) Имеем

$$\chi(\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{Z}))=\prod_{k=1}^{n}\zeta(1-2k).$$

§ 6. Когомологии алгебр Ли: общие сведения

6.1. Методы вычислений. Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли; A — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. В этом параграфе мы опишем несколько приемов вычисления H $(\mathfrak{g}, A)$ и результатов таких вычислений для конечномерных алгебр Ли.

Прежде всего, рассмотрим ситуацию, типичную для полупростых алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ — абелева подалгебра, такая, что $\mathfrak{g}$ (соответственно A) допускают разложение в прямую сумму корневых (соответственно весовых) подпространств относительно $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}=\bigoplus\limits_{\gamma\in\mathfrak{h}^*}\mathfrak{g}_\gamma$, $A=\bigoplus\limits_{\mu\in\mathfrak{h}^*}A_\mu$. Тогда комплекс коцепей $C^\cdot(\mathfrak{g}, A)$ также допускает такое разложение. Пусть $C^\cdot_{(0)}(\mathfrak{g}, A)$ — его инвариантная часть.

6.1.1. Предложение. Вложение $C^\cdot_{(0)}(\mathfrak{g}, A)\to C^\cdot(\mathfrak{g}, A)$ является квазиизоморфизмом. $\blacksquare$

Аналогично можно воспользоваться разложением по характерам центра $U(\mathfrak{g})$.

С помощью инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ (а также на A, если модуль унитарен) часто удается воспользоваться следующим приемом Ходжа. Пусть $(K^\cdot, d)$ — комплекс конечномерных гильбертовых пространств (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Пусть $(K^\cdot, d^*)$ — дуальный комплекс, $\Delta^i: dd^*+d^*d: K^i\to K^i$ — операторы Лапласа.

6.1.2. Предложение. Вложение $(\mathrm{Ker}\Delta^\cdot, 0)\to(K^\cdot, d)$ является квазиизоморфизмом комплексов. В частности, $H^i(K')=$ $=\mathrm{Ker}\Delta^i$.

С общей парой $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, состоящей из алгебры Ли и ее подалгебры, связана *спектральная последовательность Серра—Хохшильда.*

6.1.3. Теорема. Существует спектральная последовательность с членом $E_1^{pq}=H^q(\mathfrak{h}, \mathrm{Hom}(\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), A)$, сходящаяся к $H^n(\mathfrak{g}, A)$. Если $\mathfrak{h}$ — идеал, то $E_2^{pq}=H^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^q(\mathfrak{h}, A))$.

6.2. Полупростые алгебры. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра над $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, A — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Рассматривая действие центра $U(\mathfrak{g})$, можно по образцу п. 6.1.1 получить следующий факт.

6.2.1. Теорема. $H^q(\mathfrak{g}, A)=H^q(\mathfrak{g}, A^{\mathfrak{g}})=H^q(\mathfrak{g}, \mathrm{k})\otimes A^{\mathfrak{g}}$. Аналогично для $H_q(\mathfrak{g}, A)$.

Напомним, что по теореме Картана

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}, k)=H^{\cdot}_{\mathrm{top}}(G, k),$$

где G — связная компактная группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$, а $H^{\cdot}_{\mathrm{top}}$ означает когомологии G как топологического пространства.

Вычисление кольца $H^{\cdot}_{\mathrm{top}}(G, k)$ основано на общей теореме Хопфа: это конечномерная суперкоммутативная алгебра Хопфа и потому она свободно порождена конечным числом нечетномерных образующих. Размерности этих образующих известны для всех (полу)простых групп.

§ 7. Непрерывные когомологии групп Ли

7.1. Непрерывная гомологическая алгебра. При работе с топологическими группами, модулями и т. п. используются комплексы и резольвенты, на которые наложены дополнительные ограничения, учитывающие топологию. Категорный формализм несколько отходит на задний план, но сохраняет свое значение как модель для основных определений и вычислений.

7.2. G-модули и комплексы G-модулей. Пусть G — сепарабельная локально компактная группа.

а) *Непрерывным G-модулем* назовем локально выпуклое отделимое топологическое векторное пространство (ЛВОП) E, снабженное непрерывным представлением G; *G-морфизмом* из E в F называется линейное непрерывное отображение $\varphi: E\to F$, сплетающее действия G в E и F. Множество G-морфизмов обозначается $\mathrm{Hom}_G(E, F)$. Непрерывные G-модули и их морфизмы образуют категорию, которая аддитивна, но не абелева.

б) Линейное непрерывное инъективное отображение $\varphi: E\to F$ двух ЛВОП называется *сильным*, если у φ существует непрерывное левое обратное отображение. Произвольное непрерывное линейное отображение $\varphi: E\to F$ называется *сильным*, если инъективные отображения $\mathrm{Ker}\,\varphi\to E$ и $E/\mathrm{Ker}\,\varphi\to F$ являются сильными. В этом случае $\mathrm{Im}\,\varphi$ замкнуто в F, отображение $E/\mathrm{Ker}\,\varphi\to\mathrm{Im}\,\varphi$ бинепрерывно, и $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ имеют топологические дополнения соответственно в E и F.

в) Комплекс (коцепной) ЛВОП

$$E^{\cdot}=\{\ldots E^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}E^{0}\xrightarrow{d^{0}}E^{1}\to\ \ldots\}$$

называется *сильным*, если все d^i — сильные. Снабдим $\operatorname{Ker} d^n$ и $\operatorname{Im} d^{n-1}$ топологией, индуцированной с E^n, а $H^n=\operatorname{Ker} d^n/\operatorname{Im} d^{n-1}$ — фактортопологией. Тогда когомологии H^n будут отделимыми пространствами.

Комплекс $0\to E\to E^0\to E^1\to\ldots$ называется *резольвентой* E, если он точен, т. е. все его когомологии равны 0.

г) G-морфизм $\varphi: E\to F$ двух G-модулей называется *сильным*, если φ является сильным в смысле п. б). Аналогично, комплекс G-модулей называется *сильным*, если он является сильным в смысле п. в).

д) G-модуль F называется относительно инъективным, если он удовлетворяет условию продолжения G-морфизмов: для любого G-мономорфизма (в теоретико-множественном смысле) $\varphi: E_1\to E_2$ и любого G-морфизма $u: E_1\to E_2$ существует продолжающий u морфизм $w: E_2\to F$ (так что $u=w\circ\varphi$).

Свойства введенных объектов суммируются в следующем предложении.

7.2.1. Предложение. Пусть заданы два G-модуля E, F, сильная резольвента

$$0\to E\to E^0\to E^1\to\ldots,$$

и комплекс G-модулей

$$0\to F\to F^0\to F^1\to\ldots,$$

где все F^i относительно инъективны. Тогда любой G-морфизм $\varphi: E\to F$ продолжается до G-морфизма комплексов $\varphi^{\cdot}: E^{\cdot}\to F^{\cdot}$, и любые два таких продолжения можно связать G-гомотопией (то есть гомотопией, состоящей из G-морфизмов).

7.3. Функторы Ext_G^n. Пусть E, F — два G-модуля. Назовем *сильной инъективной резольвентой* модуля F сильную точную последовательность G-модулей, состоящую из относительно инъективных G-модулей

$$0\to F\to F^0\to F^1\to F^2\to\ldots$$

7.3.1. Определение. $\operatorname{Ext}_G^n(E,F)$ — это n-я группа когомологий комплекса

$$0\to\operatorname{Hom}_G(E,F^0)\to\operatorname{Hom}_G(E,F^1)\to\ldots$$

7.3.2. Предложение. а) Любой G-модуль имеет сильную инъективную резольвенту; любые две такие резольвенты связаны непрерывной G-гомотопией. Поэтому топологические пространства $\operatorname{Ext}_G^n(E,F)$ определены однозначно с точностью до изоморфизма.

Положим $H^n_{\mathrm{cont}}(G, E)=\operatorname{Ext}_G^n(\mathbf{C}, E)$, где $\mathbf{C}$ — G-модуль с тривиальным действием.

7.4. Коцепи. Пусть E — ЛВОП. Для любой локальной компактной сепарабельной группы G обозначим через $C^n_{\text{cont}}(G, E)$ пространство непрерывных отображений $G^{n+1} \to E$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Снабдим $C^n_{\text{cont}}(G, E)$ действием G по обычной формуле

$$(gf)(g_0, \ldots, g_n) = g \cdot f(g^{-1}g_0, \ldots, g^{-1}g_n),$$

определим дифференциал формулой

$$(df)(g_0, \ldots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1})$$

и аугментацию $\varepsilon: E \to C^0(G, E)$ формулой $\varepsilon(e)g = e$.

Если G — группа Ли, то мы можем аналогичным образом построить пространства C^∞-коцепей $C^n_\infty(G, E)$ и L^p_{loc}-коцепей $L^p_{\text{loc}}C^n(G, E)$. Действие G, d и ε корректно определены на них.

7.4.1. Предложение. Комплексы $C^{\cdot}_{\text{cont}}(G, E)$; $C^{\cdot}_\infty(G, E)$, если E квазиполно; $L^p_{\text{loc}}C^{\cdot}(G, E)$, если E полно, являются сильными относительно инъективными резольвентами G-модуля E. ■

Таким образом, пространства $H^n_{\text{cont}}(G, E)$ можно вычислять с помощью комплекса непрерывных коцепей с обычными свойствами, а также с помощью комплекса гладких или локально-суммируемых коцепей для подходящих G и E.

7.4.2. Предложение. Любая сильная точная тройка G-модулей $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ индуцирует обычную бесконечную последовательность $H^n(G, E)$, точную в алгебраическом смысле слова.

7.4.3. Некоторые свойства непрерывных когомологий.

а) $H^0(G, E) = E^G$.

б) Если E — пространство Фреше и $H^n(G, E)$ отделимо, то $H^n(G, E)$ — также пространство Фреше.

в) Если E — бочечное пространство, то имеется топологический изоморфизм между $\operatorname{Ext}^n_G(E, F)$ и $H^n_{\text{cont}}(G, \operatorname{Hom}(E, F))$.

г) Если G компактна, то каждый квазиполный G-модуль F относительно инъективен, в частности, $\operatorname{Ext}^n_G(E, F) = 0$ при $n \geqslant 1$.

д) Пусть $\widehat{G}$ — пространство классов унитарных неприводимых представлений группы G. Если тривиальное представление изолировано в $\widehat{G}$, то $H^1_{\text{cont}}(G, E) = 0$ для любого унитарного G-модуля E.

е) Пусть $z \in G$ — такой центральный элемент, что $z - \mathrm{id}$ является автоморфизмом G-модуля E. Тогда $H^n_{\text{cont}}(G, E) = 0$ для всех $n \geqslant 0$.

В частности, если центр действует на E нетривиальным характером, то $H^{\cdot}_{\text{cont}}(G, E) = 0$, если центр действует на E, F разными характерами, то $\operatorname{Ext}^{\cdot}_G(E, F) = 0$.

ж) Аналогично, пусть μ — мера с компактным носителем на G, лежащая в центре алгебры таких мер со сверткой. Если $\mu(1)=1$ и действие $\mu-\mathrm{id}$ на E обратимо, то $H^n_{\mathrm{cont}}(G, E)=0$. В частности, если все классы сопряженности в G относительно компактны, то для любого неприводимого унитарного G-модуля $E\neq\mathbb{C}$ имеем $H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E)=0$.

7.5. Индуцированные модули. Пусть $H\subset G$ — замкнутая подгруппа, E — некоторый H-модуль. Обозначим через $\mathrm{Ind}_{\mathrm{cont}}E$ пространство непрерывных отображений $f: G\to E$ со свойством $f(gh)=h^{-1}f(g)$, снабженное действием $(gf)(g')=f(g^{-1}g')$.

7.5.1. Предложение. Если E квазиполно, то пространства $H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, \mathrm{Ind}_{\mathrm{cont}}E)$ и $H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E)$ топологически изоморфны.

Для групп Ли можно аналогично определить модули $\mathrm{Ind}_{\infty}E$ и $L^p_{\mathrm{loc}}\mathrm{Ind}\,E$ и доказать аналог п. 7.5.1.

7.6. Спектральная последовательность Линдона — Серра — Хохшильда. Пусть H — замкнутый нормальный делитель в G, причем морфизм $G\to G/H$ допускает локальное непрерывное сечение.

Рассмотрим квазиполный G-модуль E. Предположим, что E — пространство Фреше и все $H^n_{\mathrm{cont}}(H, E)$ отделимы. Определим действие G/H на $H^n_{\mathrm{cont}}(H, E)$ следующей формулой, применимой к коциклам $f\in Z^n_{\mathrm{cont}}(H, E)$:

$$(gf)(h_0, \ldots, h_n)=g(f(g^{-1}h_0g, \ldots, g^{-1}h_ng)).$$

7.6.1. Теорема. В описанных условиях существует спектральная последовательность с членом $E_2^{pq}=H^p_{\mathrm{cont}}(G/H, H^q_{\mathrm{cont}}(H, E))$, сходящаяся к $H^n_{\mathrm{cont}}(G, E)$. ■

7.7. Теоремы ван Эста. В этом пункте G означает связную группу Ли, $K\subset G$ — ее максимальную связную компактную подгруппу, $M=G/K$. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ — алгебры Ли G, K, реализованные правоинвариантными векторными полями.

Пусть E — некоторый G-модуль. Элемент $e\in E$ называется дифференцируемым или C^∞, если отображение $\tilde{e}: G\to E$, $\tilde{e}(g)=g\cdot e$, принадлежит классу C^∞. Пусть E^∞ — множество C^∞-элементов E. Это всюду плотное G-инвариантное подпространство. Отображение $E^\infty\to C^\infty(G, E): e\mapsto\tilde{e}$ инъективно и совместимо с действием G на $C^\infty(G, E)$ правыми сдвигами. Введем на E^∞ индуцированную топологию. G-модуль E называется модулем класса C^∞, если вложение $E^\infty\to E$ является топологическим изоморфизмом.

На модуле E класса C^∞ можно определить действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ формулой

$$Xe=\lim_{t\to 0}t^{-1}(\exp(tX)e-e);\quad X\in\mathfrak{g},\quad e\in E.$$

Это действие непрерывно и продолжается на $U(\mathfrak{g})$. Ван Эст доказал, что $H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E)$ можно вычислить в терминах пары алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

7.7.1. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-когомологии. Рассмотрим комплекс

$$C^{\cdot}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), E),$$

где K действует на $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ присоединенным представлением и дифференциал задан обычной формулой

$$(df)(\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X_i f(\bar{X}_0, \ldots, \hat{\bar{X}}_i, \ldots, \bar{X}_n) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(\overline{[X_i, X_j]}, \bar{X}_1, \ldots, \hat{\bar{X}}_i, \ldots, \hat{\bar{X}}_j, \ldots, \bar{X}_n),$$

где $X_i \in \mathfrak{g}$, $\bar{X}_i = X_i \bmod \mathfrak{k}$. Обозначим когомологии этого комплекса через $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E)$.

7.7.2. Теорема. Если E — C^∞-G-модуль, то имеется канонический изоморфизм

$$H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E) = H^{\cdot}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, E). \blacksquare$$

Эта теорема полезна в совокупности со следующим результатом.

7.7.3. Предложение. Пусть E — любой полный G-модуль. Тогда

$$H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E) = H^{\cdot}_{\mathrm{cont}}(G, E^\infty). \blacksquare$$

§ 8. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли

8.1. Векторные поля и алгебры токов. В этом параграфе рассматриваются алгебры Ли над основным полем $k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ следующих типов.

а. W_n — алгебра Ли формальных векторных полей, т. е. дифференцирований кольца формальных рядов $k[[x_1, \ldots, x_n]]$. Положим $L_k = L_k(n) = \{\Sigma f_i \partial/\partial x_i | f_i \in (x_1, \ldots, x_n)^{k+1}\}$, $k=-1, 0, 1, \ldots$. Имеем $W_n = L_{-1}(n) \supset L_0(n) \supset L_1(n) \supset \ldots$ — убывающая фильтрация; $[L_a, L_b] \subset L_{a+b}$; $\mathfrak{gl}(n) = L_0(n)/L_1(n)$.

б. $\hat{S}_n = \{X = \Sigma f_i \partial/\partial x_i | \Sigma \partial f_i/\partial x_i = c_X \in k\} \subset W_n$, $S_n = \{X | c_X = 0\}$

в. $\hat{H}_n = \{X = \Sigma f_i \partial/\partial x_i | \mathrm{Lie}_X \omega = c_X \omega,\ c_X \in k\} \subset W_{2n}$, где $\omega = dx_1 \wedge dx_{n+1} + \ldots + dx_n \wedge dx_{2n}$ (гамильтоновы поля); $H_n = \{X | c_X = 0\} \subset \hat{H}_n$.

г. $K_n = \{X = \Sigma f_i \partial/\partial x_i | \mathrm{Rie}_X \nu = g\nu\} \supset W_{2n+1}$, где $\nu = x_1 dx_{n+1} + \ldots + x_n dx_{2n} + dx_{2n+1}$ (контактные поля).

д. $T(M)$ — алгебра Ли векторных полей на C^∞-многообразии M.

е. $\mathfrak{g}^M$ — гладкие функции на C^∞-многообразии M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (алгебра токов).

Мы будем рассматривать в основном случай $M=S^1$.

Все эти алгебры Ли имеют естественную топологию: линейную в случаях а—г, C^∞ в случае д. Мы рассматриваем лишь топологические модули коэффициентов и когомологии, определенные с помощью комплекса непрерывных коцепей; не оговаривая это специально, мы обозначаем через $H^q(W, A)$ и т. п. такие непрерывные когомологии.

8.2. Теорема конечномерности. Пусть $k=\mathbf{R}$ и подалгебра $\mathfrak{g}\subset W_n$ содержит элемент $\Sigma c_i x_i \partial/\partial x_i$, $c_i>0$. Тогда для любого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля A пространство $H^\cdot(\mathfrak{g}, A)$ конечномерно.

8.2.1. Следствие. Если $\dim A<\infty$, то конечномерны когомологии $H^\cdot(\mathfrak{g}, A)$ для $\mathfrak{g}=W_n$, $\widehat{S}_n$, $\widehat{H}_n$, K_n ($k=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). ■

Доказательство основано на предложении п. 6.2.1: следует рассмотреть весовое разложение относительно элемента $\sum x_i\partial/\partial x_i$ или $\sum_{i=1}^{n} x_i\partial/\partial x_i+2x_{2n+1}\partial/\partial x_{2n+1}$ (для K_n).

8.3. Кольцо $H^\cdot(W_n, k)$. Обозначим через X_n клеточное разбиение, которое является ограничением на $2n$-скелет бесконечномерного грассманиана $\mathrm{Gr}(n, \mathbf{C}^\infty)$ главного расслоения над этим грассманианом со слоем $U(n)$.

8.3.1. Теорема. Имеется изоморфизм колец $H^\cdot(W_n, k)\cong H^\cdot(X_n, k)$; произведение элементов положительной размерности в этих кольцах равно нулю. ■

Доказательство основано на прямом установлении изоморфизма членов E_2 двух спектральных последовательностей:

а. Спектральная последовательность Серра—Хохшильда, отвечающая подалгебре $\mathrm{gl}(n, k)\subset W_n$.

б. Спектральная последовательность Лерэ для расслоения $X_n\to sk_{2n}\mathrm{Gr}(n, \mathbf{C}^\infty)$.

8.4. Когомологии W_n **с другими коэффициентами.**

8.4.1. Теорема. Пусть $\Omega_n^\cdot$ — W_n-модуль внешних форм кольца $k[[x_1, \ldots, x_n]]$. Биградуированная алгебра $H^\cdot(W_n, \Omega_n^\cdot)$ порождена образующими

$$\lambda_i \in H^{2i-1}(W_n, \Omega_n^0), \quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

$$\mu_j \in H^j(W_n, \Omega_n^j), \quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

которые связаны соотношениями суперкоммутативности по полной степени, а также соотношением

$$\mu_{j_1}\ldots\mu_{j_s}=0 \text{ } при \text{ } j_1+\ldots+j_s>n. \text{ ■}$$

Доказательство основано на изоморфизме $H^{\cdot}(W_n, \Omega_n^{\cdot}) = H^{\cdot}(L_0, \Lambda^{\cdot}V)$, где V — пространство $\left\{\sum a_i dx_i \mid a_i \in k\right\}$, L_0 действует на $\Lambda^{\cdot}V$ через проекцию $L_0 \to L_0/L_1 = \mathrm{gl}(n, k)$. Когомологии вычисляются с помощью спектральной последовательности Серра—Хохшильда для подалгебры $gl(n, k)$.

Аналогично устанавливается следующий результат.

8.4.2. Теорема. Пусть A — W_n-модуль формальных тензорных полей, ассоциированный с тензорным $\mathrm{gl}(n)$-модулем A. Тогда *имеется изоморфизм*

$$H^{\cdot}(W_n, \mathscr{A}) \cong H^{\cdot}(\mathrm{gl}(n)) \otimes H^{\cdot}(L_1(n), k) \otimes A)^{\mathrm{gl}(n)}. \blacksquare$$

8.4.3. Теорема. Пусть W_n' — W_n-модуль непрерывных линейных функционалов на W_n. Тогда имеется канонический изоморфизм

$$H^q(W_n'; W_n') \cong H^{2n+1}(W_n) \otimes H^{q-2n}(\mathrm{gl}(n); k). \blacksquare$$

Доказательство использует последовательность Серра—Хохшильда для подалгебры $gl(n, k)$.

Для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеется гомоморфизм коцепных комплексов

$$C^{q+1}(\mathfrak{g}, k) \to C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') : f \mapsto \tilde{f},$$

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_q)(x) = f(x_1, \ldots, x_q, x)$$

Обозначим $\mathrm{var} : H^{q+1}(\mathfrak{g}, k) \to H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ индуцированный гомоморфизм когомологий.

8.4.4. Теорема: а. $\mathrm{var} : H^{2n+1}(W_n, k) \to H^{2n}(W_n, W'_n)$ является изоморфизмом.

б. Последовательность

$$H^{q+1}(W_{n+1}) \xrightarrow{i} H^{q+1}(W_n) \xrightarrow{\mathrm{var}} H^q(W_n, W_n')$$

точна; здесь i индуцировано вложением $W_n \subset W_{n+1}$.

8.5. Другие алгебры формальных векторных полей. Известны следующие аналоги теоремы п. 8.3.1:

8.5.1. Теорема. а) Пусть Y — прообраз $2n$-скелета бесконечномерного грассманиана в главном $SU(n)$-расслоении над ним. Имеется изоморфизм колец

$$H^{\cdot}(\widehat{S}_n, k) = H^{\cdot}(S^1 \times Y_n, k).$$

б) Пусть Z_n — прообраз $(4n+2)$-скелета бесконечномерного грассманиана в главном $S^1 \times \mathrm{Sp}(2n)$-расслоении над ним. Имеется изоморфизм колец

$$H^{\cdot}(K_n, k) = H^{\cdot}(Z_n, k). \blacksquare$$

Аналоги для $\widehat{H}_n$, H_n, S_n неизвестны; вычислены лишь когомологии этих алгебр в «стабильных» размерностях ($\leqslant n$ или $\leqslant$ линейной функции от n).

8.6. Когомологии алгебры Ли векторных полей. Пусть M — некоторое C^∞-многообразие размерности n. Обозначим через $x(M)$ расслоение с базой M, структурной группой $U(n)$ и слоем X_n, описанным в п. 8.3, ассоциированное с комплексификацией касательного расслоения к M. Пусть $\operatorname{Sec} x(M)$ — функциональное пространство сечений M. Фигурирующие ниже когомологии $x(M)$ определяются, например, с помощью сингулярных коцепей: сингулярный q-симплекс $\operatorname{Sec} x(M)$ можно определить как морфизм $\Delta_q \times M \to x(M)$, коммутирующий с проекцией на M.

8.6.1. Теорема. Имеется естественный изоморфизм градуированных колец

$$H^{\cdot}(T(M), k) \cong H^{\cdot}(\operatorname{Sec} x(M), k). \blacksquare$$

Сначала устанавливается частный случай этой теоремы, относящийся к $M=\mathbf{R}^n$, который можно сформулировать совсем просто:

8.6.2. Предложение. $H^{\cdot}(T(\mathbf{R}^n), k) = H^{\cdot}(k \otimes W_n)$. $\blacksquare$

Изоморфизм здесь индуцирован гомоморфизмом $T(\mathbf{R}^n) \to W_n$, который ставит в соответствие векторному полю его ∞-струю в начале координат.

Затем когомологии $T(M)$ и $x(M)$ вычисляются по Чеху с помощью покрытий M и используется теорема п. 8.3.1.

Приведем еще формулировку аналогичного результата, относящегося к $T(M)$-модулю гладких функций $C^\infty(M)$.

Пусть $u(M)$ — главное $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение, ассоциированное с комплексифицированным касательным расслоением к M. Мы можем считать, что $u(M)$ является подрасслоением в $x(M)$.

8.6.3. Теорема. Имеется естественный изоморфизм

$$H^{\cdot}(T(M), C^\infty(M)) \cong H^{\cdot}(Y(M), \mathbf{R}),$$

$$Y(M) = \{(y, s) \in M \times \operatorname{Sec} x(M) \mid s(y) \in u(M)\}. \blacksquare$$

В случае $M=S^1$ имеются точные результаты для более общих коэффициентов.

8.6.4. Теорема. Кольцо $H^{\cdot}(T(S^1), C^\infty(S^1))$ — свободная суперкоммутативная $\mathbf{R}$-алгебра, порожденная циклами степеней 1, 1, 2 (φ — циклическая координата на S^1):

$$f(\varphi)\, d/d\varphi \mapsto f(\varphi), \quad f(\varphi)\, d/d\varphi \mapsto f'(\varphi),$$

$$(f(\varphi)\, d/d\varphi,\ g(\varphi)\, d/d\varphi) \mapsto \int_{S^1} \begin{vmatrix} f'(\varphi) & g'(\varphi) \\ f''(\varphi) & g''(\varphi) \end{vmatrix} d\varphi. \blacksquare$$

8.6.5. Теорема. $H^{\cdot}(T(S^1), \Omega^1(S^1))$ есть свободный $H^{\cdot}(T(S_1)$ $C^\infty(S^1))$-модуль с одной одномерной образующей, представленной коциклом

$$f(\varphi)\, d/d\varphi \mapsto f'(\varphi)\, d\varphi. \blacksquare$$

Более общо:

8.6.6. Теорема. а) $H^{\cdot}(T(S^1), \Omega^1(S^1)^{\otimes s})=0$, если $s \neq (3r^2 \pm r)/2$, $r=0, 1, 2, \ldots$

б) $H^{\cdot}(T(S^1), \Omega^1(S^1)^{\otimes s})$ есть свободный $H^{\cdot}(T(S^1), C^{\infty}(S^1))$-модуль с одной образующей степени r при $s=(3r^2 \pm r)/2$. ■

Вычисления, устанавливающие в п. 8.6.6, разбиваются на несколько шагов. Во-первых, когомологии $T(S^1)$ редуцируются к когомологиям W_1. Во-вторых, используется теорема п. 8.4.2. В третьих, при $n=1$ когомологии $L_1(1)$ удается вычислить несколькими методами.

8.7. **Когомологии алгебр токов.** Пусть G — компактная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли.

8.7.1. Теорема. Канонический гомоморфизм $H^{\cdot}(\mathfrak{g}^{S^1}, \mathbb{R}) \to H^{\cdot}(G^{S^1}, \mathbb{R})$ (когомологии функционального пространства петель) является изоморфизмом.

Более общо, пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая вещественная алгебра Ли и пусть G — компактная группа Ли такая, что $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C} = \mathrm{Lie}\, G\otimes\mathbb{C}$.

8.7.2. Теорема. Имеет место изоморфизм $H^{\cdot}(\mathfrak{g}^{S^1}, \mathbb{R}) \simeq H^{\cdot}(G^{S^1}, \mathbb{R})$. ■

В частности, $H^{\cdot}(\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})^{S^1}, \mathbb{R}) \cong H^{\cdot}(SU(n)^{S^1}, \mathbb{R}) \cong H^{\cdot}(SU(n) \times \Omega SU(n), \mathbb{R})$ есть кольцо суперкоммутативных многочленов от образующих степеней $2, \ldots, 2n-1$.

Имеются алгебраические версии задач об алгебрах токов, связанные с алгебрами Каца—Муди. Роль алгебр $\mathfrak{g}^{S^1}$ играют алгебра Каца—Муди, отвечающие симметризуемым обобщенным алгебрам Картана, а вместо групп G^{S^1} появляются бесконечномерные алгебраические группы И. Р. Шафаревича.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Интерпретация различных конструкций в алгебре, топологии и геометрии как классов одномерных и двумерных (ко)гомологий лежит в основе классических применений гомологической алгебры. Отдельные аспекты такой интерпретации можно найти в следующих книгах: когомологии пучков — в [10], [33], [68], [91], [145], когомологии групп — в [34], [89], когомологии алгебр Ли — в [14], [15]. Одномерные циклы $Z^1(G, K^*)$ в ситуации, когда G — группа Галуа конечного расширения K поля k, появились, по существу, у Гильберта (группа скрещенных гомоморфизмов) в связи с так называемой «теоремой 90» (см. [131]). Группа классов расширений, на современном языке Ext^1, была введена Бэром. Интерпретация $H^i(G, \mathbf{Z}_p)$ как образующих (при $i=1$) и соотношений (при $i=2$) p-группы G была предложена Тэйтом, см. [131]. Группа Брауэра возникла при описании систем факторов в классификации простых центральных алгебр с делением, см., например, [144]. Относительно центральных расширений бесконечномерных алгебр (алгебры Каца—Муди, Вирасоро и их обобщения) см. [14], [15], [93].

Гомотопическая теория препятствий (§ 2) изложена в ряде учебников по алгебраической топологии; см., например, [16]. Там же можно найти теорию пространств $K(\Pi, n)$, развитую А. Картаном [38]. Формализм торсоров в топологии был проработан Гротендиком [76]; теоретико-групповую версию см. в [131], где можно найти также доказательство теоремы п. 2.3.1. По поводу теоремы п. 2.5.1 см. Гротендик [78]. Относительно теоремы Кодаиры—Спенсера см. оригинальное изложение [102] или учебник Уэллса [145]. Класс Атьи был введен в [19], относительно далеких последующих обобщений см. [26], [90].

Циклические гомологии появились по разным поводам у Конна [47] и Б. Л. Фейгина—Б. Л. Цыгана [13], [61]; см. также Каруби [95]. В частности, доказательство теорем пп. 3.4.1, 3.5.1 и 3.7.1 можно найти в [61], теорем пп. 3.8.1 и 3.8.2 — в [106]. Относительно результатов из пп. 3.8, 3.9 см. [105]. См. также обзор Картье [41]. Некоммутативную дифференциальную геометрию активно развивает Конн; см. [47], где можно найти доказательство результатов, сформулированных в § 4.

Результаты о когомологиях групп и, в частности, доказательство всех результатов из § 5, можно найти в [34]. Мы опустили в нашем обзоре когомологии Галуа, которые являются неотъемлемой составной частью теории полей классов; эти вопросы будут подробно изложены в томах этой серии, посвященных алгебраической теории чисел. С основами когомологий Галуа можно ознакомиться по [131]. Полезными являются также сборник [89] и ряд статей Серра и А. Картана из их собраний сочинений [39], [133].

Когомологиям алгебр Ли (в том числе бесконечномерных) посвящена книга [15] и обзор [14]. В них приведены, в частности, результаты вычислений когомологий конкретных бесконечномерных алгебр Ли, полученные в работах И. М. Гельфанда, Д. Б. Фукса и других авторов. См. также доклад [66].

Непрерывные когомологии групп Ли изложены в книге Гишарде [80[; см. также [14] и [31]. Другой подход к непрерывным когомологиям алгебраических объектов, снабженных топологией, описан в [17].

Глава 4

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ И ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

§ 1. Определение производной категории

1.1. Определение. Морфизм комплексов $f: K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *квазиизоморфизмом*, если $H^n(f): H^n(K^{\cdot}) \to H^n(L^{\cdot})$ — изоморфизм для всех n.

В предыдущем изложении мы встречались со следующими квазиизоморфизмами.

а) Между двумя проективными (инъективными) резольвентами одного и того же объекта существует квазиизоморфизм.

б) Любой объект X категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как комплекс $\ldots \to 0 \to 0 \to X \to 0 \to 0 \ldots$ (X стоит на нулевом месте). Этот комплекс ацикличен вне нуля, а его когомологии степени 0 совпадают с X; будем называть его 0-комплексом. Пополняющее отображение ε_X левой резольвенты $P^{\cdot} \xrightarrow{\varepsilon_X} X$ определяет квазиизоморфизм комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & P^{-1} & \to & P^0 & \to & 0 & \to & 0 & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} & & \downarrow & & \downarrow & \\
\to & 0 & \longrightarrow & X & \to & 0 & \to & 0 & \to \ldots
\end{array}$$

В этом смысле понятие резольвенты является частным случаем квазиизоморфизма.

в) Морфизм нулевого комплекса $0^{\cdot} \to K^{\cdot}$ (и $K^{\cdot} \to 0^{\cdot}$) является квазиизоморфизмом, если и только если $K^{\cdot}$ ацикличен всюду.

1.2. Идея производной категории. Идеологию гомологической алгебры, как она представляется сегодня, можно сформулировать в виде нескольких принципов.

а. Объект X абелевой категории следует отождествлять со всеми его резольвентами.

б. Основной мотив этого требования состоит в том, что самые важные и стандартные функторы — Hom, тензорное произведение, Γ — в действительности должны быть определены заново. Их «наивные» определения следует применять лишь для специальных объектов, ацикличных относительно этого функтора. Скажем, если X — плоский модуль, а Y — произвольный, то $X \otimes Y$ есть правильное определение тензорного произведения. Но в общем случае правильной заменой $X \otimes Y$ является комплекс $P_{\cdot} \otimes Y$, где $P^{\cdot} \to X$ — плоская резольвента модуля X. Аналогично, правильной заменой группы $\Gamma(\mathcal{F})$ сечений пучка $\mathcal{F}$ является комплекс $\Gamma(\mathcal{J}^{\cdot})$, где $\mathcal{F} \to \mathcal{J}^{\cdot}$ — инъективная резольвента $\mathcal{F}$.

в. Принятие этой точки зрения требует, чтобы мы с самого начала рассматривали не просто объекты абелевой категории, и не только их резольвенты, а всевозможные комплексы. Это необходимо, в частности, потому, что $P^{\cdot} \otimes Y$ и $\Gamma(\mathcal{J}^{\cdot})$ в предыдущих примерах как правило будут иметь нетривиальные когомологии не только в нулевом члене (напомним, что эти когомологии называются производными функторами $\mathrm{Tor}_i(X, Y)$ и $H^i(\mathcal{F})$ соответственно). Следовательно, то отношение между объектом и его резольвентой, которое позволяет нам отождествить их, должно быть обобщено на комплексы. Таким правильным обобщением и является понятие квазиизоморфизма.

г. Отношение эквивалентности между комплексами, порожденное квазиизоморфизмами, имеет сложную структуру, и за результатами факторизации по нему нелегко уследить. Технические средства, позволяющие это сделать, и составляют основы теории производных категорий, которым посвящена большая часть этой главы.

д. Новое определение функторов $\otimes$, Γ и т. п., упомянутое в пункте б, достигает следующей цели: полуточные функторы становятся «точными». Само понятие точности в производной категории, однако, не является очевидным; ср. обсуждение в § 2. Ядро этого понятия в классической гомологической алгебре — это точная последовательность высших производных функторов, которая является инвариантом относительно смены резольвенты.

1.3. Определение-теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ — категория комплексов в $\mathscr{A}$. Существует категория $D(\mathscr{A})$ и функтор $Q:\mathrm{Kom}(\mathscr{A})\to D(\mathscr{A})$ со следующими свойствами:

а. Для любого квазиизоморфизма f морфизм $Q(f)$ является изоморфизмом.

б. Если $F:\mathrm{Kom}(\mathscr{A})\to\mathscr{D}'$ — другой функтор, переводящий квазиизоморфизмы в изоморфизмы, то он однозначно проводится через Q, то есть существует единственный функтор $G: D(\mathscr{A})\to\mathscr{D}'$ такой, что $F=G\circ Q$.

Категория $D(\mathscr{A})$ называется *производной категорией* абелевой категории $\mathscr{A}$.

1.4. Простое доказательство существования: локализация категорий.

Пусть $\mathscr{B}$ — совершенно произвольная категория, S — любой класс морфизмов в $\mathscr{B}$. Мы покажем, что существует универсальный функтор, превращающий элементы $\mathscr{B}$ в изоморфизмы. Точнее, мы построим категорию $\mathscr{B}[S^{-1}]$ и функтор «локализации по S» $Q:\mathscr{B}\to\mathscr{B}[S^{-1}]$ со свойством универсальности, аналогичным сформулированному в п. 1.3б.

С этой целью положим, прежде всего, $\mathrm{Ob}\mathscr{B}[S^{-1}]=\mathrm{Ob}\mathscr{B}$, Q тождествен на объектах.

Морфизмы в $\mathscr{B}[S^{-1}]$ строятся в несколько шагов.

а. Введем переменные x_s, по одной для каждого морфизма $s\in S$.

б. Построим ориентированный граф Г:

вершины Г$=$объекты $\mathscr{B}$;

ребра Г$=\{$морфизмы $\mathscr{B}\}\cup\{x_s\mid s\in S\}$;

ребро $X\to Y$ ориентировано от X к Y; ребро x_s имеет те же вершины, что и ребро s, но противоположную ориентацию.

в. Путем называется конечная последовательность ребер в графе Г, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего.

г. *Морфизмом* в $\mathscr{B}[S^{-1}]$ называется класс эквивалентности путей в Г с общими началом и концом. Два пути называются *эквивалентными*, если они соединены цепочкой следующих элементарных эквивалентностей:

две соседние стрелки из $Mor\,\mathscr{B}$ в данном пути можно заменить их композицией;

соседние стрелки $X\xrightarrow{s}Y\xrightarrow{x_s}X$ и $Y\xrightarrow{x_s}X\xrightarrow{s}Y$ можно заменить на $X\xrightarrow{\mathrm{id}}X$ и $Y\xrightarrow{\mathrm{id}}Y$ соответственно;

Наконец, композиция классов путей индуцирована композицией путей, а функтор $Q:\mathscr{B}\to\mathscr{B}[S^{-1}]$ переводит морфизм $X \to Y$ в класс соответствующего пути. Очевидно, для любого элемента $s \in S$ морфизм $Q(s)$ имеет обратный: класс пути x_s.

Если $F : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ — другой функтор, превращающий морфизмы из S в изоморфизмы, то функтор $G : \mathscr{B}[S^{-1}] \to \mathscr{B}'$ с условием $F = G \circ Q$ строится так:

$$G(X) = F(X),\ X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}[S^{-1}];$$

$$G(f) = F(f),\ f \in Mor\,\mathscr{B};$$

$$G(\text{класс } x_s) = F(s)^{-1},\ s \in S.$$

Мы оставляем читателю проверку корректности этого определения и единственности G.

1.5. Расщепимость и производные категории. Первое представление о структуре производной категории дает следующая конструкция. Назовем комплекс $K^{\bullet}$ *цикличным*, если все его дифференциалы нулевые (все цепи являются циклами). Цикличные комплексы образуют полную подкатегорию $\mathrm{Kom}_0(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Kom}(\mathscr{A})$. Структура $\mathrm{Kom}_0(\mathscr{A})$ очевидна: это категория $\prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{A}[n]$, где $\mathscr{A}[n]$ — «n-й экземпляр» категории $\mathscr{A}$. Пусть i — функтор вложения $\mathrm{Kom}_0(\mathscr{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathscr{A})$, а h — функтор когомологий:

$$h : \mathrm{Kom}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Kom}_0(\mathscr{A}),\quad h((K^n, d^n)) = (H^n(K^{\bullet}), 0).$$

Морфизму $f : K^{\bullet} \to L^{\bullet}$ ставится в соответствие $(H^n(f))$. Поскольку h переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы, он проводится через функтор

$$k : D(\mathscr{A}) \to \mathrm{Kom}_0(\mathscr{A}).$$

Назовем абелеву категорию $\mathscr{A}$ *полупростой*, если в ней любая точная тройка расщепима, то есть изоморфна тройке вида $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id},0} X \oplus Y \to Y \to 0$. Например, категория линейных пространств над полем или конечномерных линейных представлений конечной группы над полем нулевой характеристики полупроста. Категория абелевых групп, конечно, не полупроста: последовательность $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$ нерасщепима.

1.5.1. Предложение. Если абелева категория $\mathscr{A}$ полупроста, то функтор $k : D(\mathscr{A}) \to \mathrm{Kom}_0(\mathscr{A})$ является эквивалентностью категорий.

1.6. Варианты. В приложениях полезно рассматривать комплексы с разными условиями ограниченности, например,

$$\mathrm{Kom}^+(\mathscr{A}) : K^i = 0 \text{ для } i \leqslant i_0(K^{\bullet});$$

$$\mathrm{Kom}^-(\mathscr{A}) : K^i = 0 \text{ для } i \geqslant i_0(K^{\bullet});$$

$$\mathrm{Kom}^b(\mathscr{A}) = \mathrm{Kom}^+(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Kom}^-(\mathscr{A}).$$

Такие комплексы образуют полные подкатегории в $\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ и часто нужно рассматривать соответствующие производные категории $D^+(\mathscr{A})$, $D^-(\mathscr{A})$, $D^b(\mathscr{A})$. Например, левые проективные резольвенты лежат в $\mathrm{Kom}^-(\mathscr{A})$, а правые инъективные — в $\mathrm{Kom}^+(\mathscr{A})$.

Заметим теперь, что определение, скажем $D^+(\mathscr{A})$, можно сформулировать в двух вариантах: мы можем либо локализовать $\mathrm{Kom}^+(\mathscr{A})$ по квазиизоморфизмам, либо рассмотреть в $D(\mathscr{A})$ полную подкатегорию, состоящую из ограниченных слева комплексов. Хотелось бы быть уверенным в совпадении этих конструкций, однако для этого нам пока не хватает техники.

Дело в том, что морфизмы в $\mathscr{B}[S^{-1}]$, построенные в п. 1.4, представляются формальными выражениями вида

$$f_1\circ s_1^{-1}\circ f_2\circ s_2^{-1}\circ\ldots\circ s_k^{-1}\circ f_{k+1},\quad \text{где } f_i\in \mathrm{Mor}\,\mathscr{B},\ s\in S, \tag{1}$$

для эффективной работы с которыми нам недостает алгебраических тождеств типа «приведения к общему знаменателю». Например, в конкретных случаях трудно даже решить вопрос, не эквивалентна ли категория $\mathscr{B}[S^{-1}]$ категории с одним объектом и одним морфизмом.

Необходимые тождества мы аксиоматизируем в следующем определении.

1.7. Определение. Класс морфизмов $S\subset\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$ называется *локализующим*, если выполнены следующие условия:

а) мультипликативная замкнутость: $\mathrm{id}_X\in S$ для всех $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$; если s, $t\in S$, то $s\cdot t\in S$, когда эта композиция определена

б) условия продолжения: для любых $f\in\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$, $s\in S$ существуют $g\in\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$, $t\in S$, дополняющие угол до коммутативного квадрата в каждой из следующих двух диаграмм:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, dashed, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W & Z \arrow[l, dashed, "g"'] \\ X \arrow[u, dashed, "t"] & Y \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

в) пусть f, g — два морфизма $X\to Y$; существование морфизма $s\in S$ с $sf=sg$ равносильно существованию $t\in S$ с $ft=gt$.

1.8. Замечания. а) Рассмотрим в левом квадрате (2) пути $x_s f$ и gx_t от X к Z. Мы утверждаем, что они определяют один и тот же морфизм $X\to Z$ в $\mathscr{B}[S^{-1}]$. В самом деле, коммутативность квадрата означает, что $ft=sg$ в $\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$, откуда следует эквивалентность путей $x_s ftx_t$ и $x_s sgx_t$ и затем $x_s f$ и gx_t.

Таким образом, в $\mathscr{B}[S^{-1}]$ имеем, в несколько вольной записи, $s^{-1}f=gt^{-1}$, что позволяет перегнать в выражении (1) все «знаменатели» s_i^{-1} направо, если только S удовлетворяет условиям п. 1.7 а, б.

Аналогично, второй квадрат в (2) позволяет переносить все знаменатели налево. Это чрезвычайно упрощает исследование локализованной категории. Что касается условия в), оно обеспечивает эквивалентность между переносом направо и переносом налево.

б) К сожалению, в категории $\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ квазиизоморфизмы, вообще говоря, не образуют локализующего класса. Это препятствие обходится так: сначала строится категория $K(\mathscr{A})$ комплексов по модулю гомотопической эквивалентности, а затем проверяется, что в ней квазиизоморфизмы уже образуют локализующий класс. Это будет сделано в следующем параграфе.

Сформулируем в заключение несколько полезных свойств локализации по локализующему семейству. Следующая лемма является диаграммным вариантом замечания 1.8а.

1.9. Лемма. Пусть S — локализующий класс морфизмов в категории $\mathscr{B}$. Тогда $\mathscr{B}[S^{-1}]$ допускает следующее описание: $\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}[S^{-1}]=\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$, и далее

а) морфизм $X\to Y$ в $\mathscr{B}[S^{-1}]$ есть класс «домиков» — диаграмм (s, f) в $\mathscr{B}$ вида

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}, \quad s\in S,\ f\in \mathrm{Mor}\,\mathscr{B}, \qquad (3)$$

причем два домика принадлежат одному классу, $(s, f)\sim(t, g)$, если и только если их можно достроить до третьего домика (sr, gh), входящего в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & \\ X' \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "f" near end] & & X'' \arrow[d, "g"] \arrow[dll, "t"' near end] \\ X & & Y \end{tikzcd}.$$

Тождественный морфизм $\mathrm{id}: X\to X$ — класс домиков, содержащий домик $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$.

б) Композиция морфизмов, представленных домиками (s, f) и (t, g), представлена домиком (st', gf'), который получается из них достройкой с помощью первого квадрата (2):

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f''"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}.$$

1.9.1. Замечание. Назовем диаграмму (3) S-левым домиком. Имеется вариант леммы п. 1.8, в котором вместо S-левых домиков используются S-правые домики

$$\begin{tikzcd}
& X' & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"']
\end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов, представленных S-правыми домиками, строится с помощью второго квадрата (2).

В соответствии с этими двумя возможностями можно ввести понятия лево- и право-локализующего класса морфизмов, потребовав для них лишь половины условий 1.7б и 1.7в.

1.10. Предложение. Пусть $\mathscr{C}$ — некоторая категория, S — локализующая система морфизмов $\mathscr{C}$, $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}$ — полная подкатегория. Пусть выполнены следующие условия: условие а) и либо б$_1$), либо б$_2$):

а. $S_{\mathscr{B}} = S \cap \operatorname{Mor} \mathscr{B}$ — локализующая система в $\mathscr{B}$.

б$_1$. Для любого морфизма $s: X' \to X$, где $s \in S$, $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{B}$, существует такой морфизм $f: X'' \to X'$, что $sf \in S$, $X'' \in \operatorname{Ob} \mathscr{B}$.

б$_2$. То же, что в б$_1$, но с обращенными стрелками.

Тогда $\mathscr{B}[S_{\mathscr{B}}^{-1}]$ — полная подкатегория в $\mathscr{C}[S^{-1}]$. Точнее, канонический функтор $I: \mathscr{B}[S_{\mathscr{B}}^{-1}] \to \mathscr{C}[S^{-1}]$ является вполне строгим. ■

Используя это предложение, можно доказать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& D^+(\mathscr{A}) \arrow[dr] & \\
D^b(\mathscr{A}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & D(\mathscr{A}) \\
& D^-(\mathscr{A}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

состоит из вложений полных подкатегорий.

§ 2. Производная категория как локализация гомотопической

2.1. План. Сначала мы определим такие диаграммы в производной категории — *выделенные треугольники,* — которые заменяют и обобщают точные тройки в абелевой категории. Определение таких диаграмм не очевидно. Начать с того, что мы пока не знаем даже, что категория $D(\mathscr{A})$ аддитивна: чтобы складывать морфизмы, нужно сначала привести их к одному знаменателю. Далее, хотя категория $D(\mathscr{A})$ и окажется аддитивной, она почти никогда не абелева. Поэтому в $D(\mathscr{A})$ нельзя имитировать обычное определение точности.

Все же, несмотря на неабелевость $D(\mathscr{A})$, выделенные треугольники в ней задают замечательную структуру, которая отражает основные гомологические свойства исходной абелевой категории.

2.2. Функтор сдвига, цилиндр и конус. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая абелева категория.

а) Фиксируем целое число n и для любого комплекса $K^{\cdot} = (K^i, d_K^i)$ положим $(K^{\cdot}[n])^i = K^{n+i}$, $d_{K[n]} = (-1)^n d_K$. Если $f: K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — морфизм комплексов, то $f[n]: K^{\cdot}[n] \to L^{\cdot}[n]$ по определению, совпадает с f покомпонентно.

Отображение $T^n: \mathrm{Kom}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathscr{A})$, $T^n(K^{\cdot}) = K^{\cdot}[n]$, $T^n(f) = f[n]$ является *функтором сдвига*, осуществляющим автоэквивалентность категории $\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$. Очевидно, что он также индуцирует автоэквивалентность категорий $\mathrm{Kom}^+(\mathscr{A})$, $\mathrm{Kom}^-(\mathscr{A})$, $\mathrm{Kom}^b(\mathscr{A})$ и соответствующих производных категорий.

б) Пусть $f: K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — морфизм комплексов. *Конусом* $C(f)$ морфизма f называется комплекс

$$C(f)^i = K^i[1] \oplus L^i, \quad d_{C(f)}(k^{i+1}, l^i) = (-d_K k^{i+1}, f(k^{i+1}) + d_L l^i).$$

Удобно записывать элементы $C(f) = K^{\cdot}[1] \oplus L^{\cdot}$ в виде столбцов высоты 2, а морфизмы обозначать матрицами:

$$d_{C(f)} = \begin{pmatrix} d_{K[1]} & 0 \\ f[1] & d_L \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $d_{C(f)}^2 = 0$.

Если f — морфизм 0-комплексов (1. б), то $C(f)$ — комплекс $\ldots \to 0 \to \underset{-1}{K^0} \xrightarrow{f} \underset{0}{L^0} \to 0 \to \ldots$. В частности,

$$H^{-1}(C(f)) = \mathrm{Ker}\, f, \quad H^0(C(f)) = \mathrm{Coker}\, f.$$

в) В тех же обозначениях *цилиндром* $\mathrm{Cyl}(f)$ морфизма f называется комплекс

$$\mathrm{Cyl}(f) = K^{\cdot} \oplus K^{\cdot}[1] \oplus L^{\cdot},$$
$$d^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(k^i, k^{i+1}, l^i) = (d_K k^i - k^{i+1}, -d_K k^{i+1}, f(k^{i+1}) + d_L l^i).$$

Отметим, что если оба комплекса $K^{\cdot}$, $L^{\cdot}$ ограничены слева, справа или с двух сторон, то $C(f)$ и $\mathrm{Cyl}(f)$ обладают тем же свойством ограниченности. Кроме того, если $K^{\cdot}$, $L^{\cdot} \in \mathrm{Kom}(\mathscr{B})$, где $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — некоторая аддитивная подкатегория, то $C(f)$, $\mathrm{Cyl}(f) \in \mathrm{Kom}(\mathscr{B})$.

Основные свойства конуса и цилиндра собраны в следующей лемме.

2.2.1. Лемма. Для любого морфизма $f: K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ можно построить коммутативную диаграмму в $\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ с точными строками, функториальную по f:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & L^{\bullet} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & C(f) & \xrightarrow{\delta=\delta(f)} & K^{\bullet}[1] & \to 0 & & \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \| {\scriptstyle \pi} & & & & & \\
0 \to K^{\bullet} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathrm{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \to 0 & & & (1) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & & & \\
K^{\bullet} & \xrightarrow{f} & L^{\bullet} & & & & & &
\end{array}$$

со следующими свойствами:

α, β — квазиизоморфизмы, причем $\beta\alpha = \mathrm{id}_{L^{\bullet}}$, а $\alpha\beta$ гомотопен $\mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$, так что $L^{\bullet}$ и $\mathrm{Cyl}(f)$ канонически изоморфны в производной категории.

2.3. Определение. а) *Треугольником* в категориях комплексов Kom, D, $D^+, \ldots$ называется диаграмма вида

$$K^{\bullet} \xrightarrow{u} L^{\bullet} \xrightarrow{v} M^{\bullet} \xrightarrow{w} K^{\bullet}[1].$$

б) *Морфизмом треугольников* называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
K^{\bullet} & \xrightarrow{u} & L^{\bullet} & \xrightarrow{v} & M^{\bullet} & \xrightarrow{w} & K^{\bullet}[1] \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f[1]} \\
K_1^{\bullet} & \xrightarrow{u_1} & L_1^{\bullet} & \xrightarrow{v_1} & M_1^{\bullet} & \xrightarrow{w_1} & K_1^{\bullet}[1].
\end{array}$$

Этот морфизм называется *изоморфизмом*, если f, g, h — изоморфизмы в соответствующей категории.

в) *Выделенным треугольником* называется любой треугольник, квазиизоморфный следующей части некоторой диаграммы (1):

$$K^{\bullet} \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} K^{\bullet}[1]. \ \blacksquare$$

Следующее предложение показывает, что точные тройки дополняются до выделенных треугольников.

2.4. Предложение. Любая точная тройка комплексов в Kom $(\mathcal{A})$ квазиизоморфна средней строке подходящей диаграммы вида (1).

Доказательство. Пусть $0 \to K^{\bullet} \xrightarrow{f} L^{\bullet} \xrightarrow{g} M^{\bullet} \to 0$ — точная тройка. Требуемый квазиизоморфизм имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & K^{\bullet} & \longrightarrow & L^{\bullet} & \longrightarrow & M^{\bullet} & \longrightarrow 0 \\
& \| & & \uparrow{\scriptstyle \beta} & & \uparrow{\scriptstyle g} & \\
0 \to & K^{\bullet} & \to & \mathrm{Cyl}(f) & \to & C(f) & \to 0,
\end{array}$$

где β взят из (1), а $\gamma(k^{i+1}, l^i) = g(l^i)$.

Следующая теорема показывает, что когомологические свойства выделенных треугольников в $D(\mathcal{A})$ (или в $D^+(\mathcal{A}), \ldots$) полностью аналогичны свойствам точных троек комплексов.

2.5. Теорема. Пусть

$$K^{\cdot} \xrightarrow{u} L^{\cdot} \xrightarrow{v} M^{\cdot} \xrightarrow{w} K^{\cdot}[1] \tag{2}$$

— выделенный треугольник в $D(\mathscr{A})$. Тогда последовательность когомологий

$$\ldots \to H^i(K^{\cdot}) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(L^{\cdot}) \xrightarrow{H^i(v)} H^i(M) \xrightarrow{H^i(w)} H^i(K^{\cdot}[1]) = H^{i+1}(K^{\cdot}) \to \ldots$$

точна.

Теорему достаточно доказать для квазиизоморфного (2) выделенного треугольника

$$K^{\cdot} \xrightarrow{\bar{u}} \mathrm{Cyl}(u) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} K^{\cdot}[1],$$

построенного по диаграмме (1). Это делается непосредственно.

2.6. Определение. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория. *Гомотопическая категория* $K(\mathscr{A})$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Ob}\, K(\mathscr{A}) = \mathrm{Ob}\, \mathrm{Kom}(\mathscr{A})$$

$\mathrm{Mor}\, K(\mathscr{A}) = \mathrm{Mor}\, \mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ по модулю гомотопической эквивалентности.

Через $K^+(\mathscr{A})$, $K^-(\mathscr{A})$, $K^b(\mathscr{A})$ обозначаются полные подкатегории $K(\mathscr{A})$, состоящие из комплексов с соответствующими условиями ограниченности.

Ясно, что $K(\mathscr{A})$ — аддитивная категория и что на ней корректно определены функторы H^i. Поэтому на нее дословно переносится определение квазиизоморфизмов п. 1.1.

2.7. Теорема. а) В категории $K(\mathscr{A})$ класс квазиизоморфизмов является локализующим.

б) Локализация $K(\mathscr{A})$ по квазиизоморфизмам канонически изоморфна $D(\mathscr{A})$.

Это же верно для категорий $K^*(\mathscr{A})$ и $D^*(\mathscr{A})$ с $* = +, -, b$.

Доказательство этой теоремы несложно, но несколько громоздко. Основной технический прием — использование леммы п. 2.2.1.

2.8. Аддитивность $D(\mathscr{A})$. Для сложения морфизмов в $D(\mathscr{A})$ покажем, что любые два морфизма $\varphi, \varphi' : X \to Y$ в $D(\mathscr{A})$ можно «привести к общему знаменателю», т. е. представить домиками

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \tag{3}$$

с одинаковыми вершинами и одинаковыми левыми скатами.

В самом деле, пусть φ, φ' представлены какими-то домиками

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & Z' \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X & & Y. \end{tikzcd}$$

Дополним угол

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed, "r'"] \arrow[d, dashed, "r"'] & Z' \arrow[d, "s'"] \\ Z \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

до коммутативного квадрата в $K(\mathcal{A})$. Поскольку s, s', r — квазиизоморфизмы, r' — тоже квазиизоморфизм. Поэтому φ и φ' можно представить домиками вида (3) с $t=sr=s'r'$, $g=fr$, $g'=f'r'$.

Теперь определим сумму $\varphi+\varphi'$ в $D(\mathcal{A})$ как морфизм, представленный домиком $X\xleftarrow{t}U\xrightarrow{g+g'}Y$.

2.9. Морфизмы в $D(\mathcal{A})$. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $f:K^\cdot\to L^\cdot$ морфизм в Kom $\mathcal{A}$). Из определения морфизмов в $D(\mathcal{A})$ ясно, что $f=0$ в $D(A)$ тогда и только тогда, когда существует квазиизоморфизм $s:L^\cdot\to M^\cdot$ такой, что sf гомотопно 0 (эквивалентно, существует квазиизоморфизм $t:N^\cdot\to K^\cdot$ такой, что ft гомотопно 0).

Если $f=0$ в $D(\mathcal{A})$ то, конечно, $H^i(f)=0$ для всех i. Рассматривая морфизм комплексов длины 2 (для $\mathcal{A}=\mathcal{A}b$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "c"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ \ldots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

(b, c переводят образующую каждой группы в образующую, a, d умножают образующую на 2), покажите, что обратное неверно. Таким образом, в цепочке импликаций $\{f=0$ в Kom $\mathcal{A}\}\Rightarrow\{f=0$ в $K(\mathcal{A})\}\Rightarrow\{f=0$ в $D(\mathcal{A})\}\Rightarrow\{H^i(f)=0$ для всех $i\}$, все импликации являются строгими.

2.10. Срезающие функторы. Для каждого комплекса $K^\cdot\in\mathrm{Ob}$ Kom $\mathcal{A}$ и каждого целого i определим комплексы $\tau_{\leqslant i}K^\cdot$, $\tau_{\geqslant i}K^\cdot$ (ср. гл. 1, п. 3.3). полагая

$$(\tau_{\leqslant i}K^\cdot)^n=\begin{cases}K^n & \text{при } n<i,\\ \operatorname{Ker} d^i & \text{при } n=i,\\ 0 & \text{при } n>i.\end{cases}$$

$$(\tau_{\geqslant i}K^\cdot)^n=\begin{cases}0 & \text{при } n<i-1,\\ K^{i-1}/\operatorname{Ker} d^{i-1} & \text{при } n=i-1,\\ K^n & \text{при } n>i.\end{cases}$$

Ясно, что

$$H^n(\tau_{\leqslant i}K^\cdot)=\begin{cases}H^n(K^\cdot) & \text{при } n\leqslant i,\\ 0 & \text{при } n>i;\end{cases}$$

$$H^n(\tau_{\geqslant i}K^\cdot)=\begin{cases}0 & \text{при } n<i,\\ H^n(K^\cdot) & \text{при } n\geqslant i.\end{cases}$$

2.10.1. Предложение. а) Естественные морфизмы комплексов $\alpha:\tau_{\leqslant i}K^\cdot\to K^\cdot$ (соответственно $\beta:K^\cdot\to\tau_{\geqslant i}K^\cdot$) продолжаются до функтора $\tau_{\leqslant i}$ (соответственно $\tau_{\geqslant i}$) из категории $\mathrm{Kom}\,\mathcal{A}$ в себя.

б) Функторы $\tau_{\leqslant i}$, $\tau_{\geqslant i}$ переводят квазиизоморфизмы в квазиизоморфизмы и поэтому индуцируют функторы (обозначаемые снова $\tau_{\leqslant i}$, $\tau_{\geqslant i}$) из $D(\mathcal{A})$ в себя.

в) Существует функториальный по $K^\cdot\in\mathrm{Ob}\,D(\mathcal{A})$ выделенный треугольник

$$\tau_{\leqslant i}K^\cdot\xrightarrow{\alpha}K^\cdot\xrightarrow{\beta}\tau_{\geqslant i+1}K^\cdot\to\tau_{\leqslant i}K^\cdot[1]$$

в $D(\mathcal{A})$.

Доказательства всех этих утверждений легко выводятся из предложения п. 2.4. Относительно дальнейших свойств и обобщений срезающих функторов $\tau_{\leqslant i}$, $\tau_{\geqslant i}$ см. гл. 5, п. 3.4.

§ 3. Структура производной категории

3.1. Комплексы—объекты. Назовем *H^0-комплексом* любой комплекс $K^\cdot$, для которого $H^i(K^\cdot)=0$ при $i\neq0$. При этом все равно, в какой из категорий рассматривается $K^\cdot$, ибо H^i превращает квазиизоморфизмы в изоморфизмы и потому определен не только на $\mathrm{Kom}^*(\mathcal{A})$, но и на $K^*(\mathcal{A})$ и $D^*(\mathcal{A})$, $*=\varnothing, +, -, b$.

3.1.1. Предложение. Функтор $Q:\mathcal{A}\to D^*(\mathcal{A})$ задает эквивалентность категории $\mathcal{A}$ с полной подкатегорией $D^*(\mathcal{A})$, состоящей из H^0-комплексов.

3.2. Расширения и функторы Ext. Вместо 0-комплексов и H^0-комплексов мы можем рассматривать также i-комплексы и H^i-комплексы с произвольным i. Структура морфизмов между такими комплексами в $D^*(\mathcal{A})$ — это следующая по сложности информация о производной категории.

Будем записывать i-комплекс с объектом $X\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ на i-м месте как $X[-i]$; вместо $X[0]$ в предыдущем пункте мы писали просто X.

3.2.1. Определение. $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X[0],Y[i])$. ■

Ниже мы покажем, что это определение совпадает с данным в гл. 2, § 4.

3.3. Замечания. а) Безразлично, какой индекс обозначается символом $*$, ибо i-комплексы ограничены, а все вложения производных категорий друг в друга суть строгие полные функторы.

б) С помощью функтора T^k мы можем отождествить $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y)$ также с $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X[k], Y[i+k])$. Умножение морфизмов в производной категории позволяет определить композицию

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) & \times & \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(Y, Z) \xrightarrow{\alpha} \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X[k], Y[i+k]) & \times & \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}[Y[i+k], Z[i+j+k]) \xrightarrow{\beta}
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

$$\|$$

$$\xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X[k], Z[i+j+k])$$

Эта композиция на Ext'ах не зависит от выбора k в нижней строчке.

в) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y)$ являются абелевыми группами, поскольку категория $D(\mathcal{A})$ аддитивна. Умножение биаддитивно. Более того, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}$ определяет бифунктор $\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$.

Рассматривая точную тройку в $\mathcal{A}$

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0 \quad (\text{соответственно } 0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0)$$

как выделенный треугольник, получаем из п. 2.5 точную последовательность

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X'', Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X' Y) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X'', Y) \to \ldots$$

(соответственно $\ldots \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y') \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y'') \to$ $\to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X, Y') \to \ldots$)

г) Следуя Ионеде, рассмотрим следующую конструкцию элементов из $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $i > 0$. Рассмотрим любой ациклический комплекс $K^{\cdot}$ вида:

$$K^{\cdot}: \ldots \to 0 \to K^{-i} = Y \to K^{-i+1} \to \ldots \to K^0 \to X = K^1 \to 0 \to \ldots \quad (1)$$

Он определяет левый домик

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{K} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X[0] & & Y[i]
\end{tikzcd},$$

где $\tilde{K}^l = K^l$ при $l \neq 1$, $\tilde{K}^1 = 0$, $s^0 = d^0_K$, $f^{-i} = \mathrm{id}_Y$. Обозначим через $y(K^{\cdot})$ морфизм в производной категории $X[0] \to Y[i]$, отвечающий этому домику.

Пусть, наконец, у нас есть два конечных ацикличных комплекса $K^\cdot$, $L^\cdot$, причем крайний левый член $K^\cdot$, то есть Y в (1), совпадает с крайним правым членом $L^\cdot$. Тогда мы можем образовать третий конечный ацикличный комплекс, «сцепив» $L^\cdot$ и $K^\cdot$ по их общему члену:

$$L^\cdot \circ K^\cdot : \ldots \to 0 \to Z \to L^{-i} \to \ldots \to L^{-1} \xrightarrow{d_L} L^\cdot \xrightarrow{f} K^{-i+1} \to \ldots$$
$$\ldots \to K^\cdot \to K^1 = X \to 0 \ldots$$

где f — композиция,

$$f : L^\cdot \xrightarrow{d_L} L^1 = Y = K^{-i} \xrightarrow{d_k} K^{-i+1}$$

(ацикличность $L^\cdot \circ K^\cdot$ легко проверяется).

3.4. Теорема. а) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ при $i < 0$.

б) $\mathrm{Ext}^0_{\mathscr{A}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$.

в) Любой элемент $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y)$ имеет вид $y(K^\cdot)$ для подходящего комплекса $K^\cdot$ вида (1) и для $y(K^\cdot) \in \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y)$, $y(L^\cdot) \in \mathrm{Ext}^j_{\mathscr{A}}(Y, Z)$, имеем

$$y(L^\cdot \circ K^\cdot) = y(L^\cdot)\, y(K^\cdot).$$

3.5. Гомологическая размерность. Предыдущая теорема показывает, что сложность производной категории $D(\mathscr{A})$ можно грубо измерить следующей характеристикой.

Гомологической размерностью $\mathrm{dh}(\mathscr{A})$ называется максимальное число p, для которого существуют объекты X, $Y \in Ob\, \mathscr{A}$ с $\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{A}}(X, Y) \neq 0$, или ∞, если такого числа нет.

Очевидно, $\mathrm{dh}(\mathscr{A}) \geqslant 0$. Нульмерные категории устроены просто.

3.5.1. Предложение. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $\mathrm{dh}(\mathscr{A}) = 0$,

б) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ для всех X, $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{A}$),

в) категория $\mathscr{A}$ полупроста (см. п. 1.5).

3.6. Одномерные категории: а) Категория $\mathscr{A}b$ одномерна. б) Категория $K[x]$-mod, где K — поле, одномерна.

Легко доказать, что размерность этих категорий $\geqslant 1$: в них есть нерасщепимые точные тройки

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{m} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to 0, \quad m > 1,$$

$$0 \to K[x] \xrightarrow{x} K[x] \to K \to 0.$$

Доказательство того, что размерность $\mathscr{A}b$ в точности равна 1, сравнительно несложно. Для доказательства одномерности $K[x]$-mod полезно развить некоторую технику, которую мы сейчас опишем.

3.7. Гомологические размерности объекта. Положим для $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$

$$\mathrm{dhp}\, X = \sup\{n : \exists Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A},\quad \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(X, Y) \neq 0\},$$

$$\mathrm{dhi}\, X = \sup\{n : \exists Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A},\quad \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(Y, X) \neq 0\}.$$

Буквы p, i — сокращения слов «проективный» и «инъективный» соответственно, что оправдывается следующей леммой.

3.7.1. Лемма. Следующие три утверждения эквивалентны:
а$_p$) $\mathrm{dhp}\, X = 0$.

б$_p$) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ для всех Y.

в$_p$) X проективен.

Аналогично, эквивалентны утверждения:

а$_i$) $\mathrm{dhi}\, X = 0$.

б$_i$) $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Y, X) = 0$ для всех Y.

в$_i$) X инъективен. ■

3.7.2. Предложение. а) Пусть комплекс

$$\ldots \to 0 \to X' \to P^{-k} \to \ldots \to P^{-1} \to P^0 \to X \to 0 \to \ldots$$

ацикличен, объекты P^{-i} проективны. Тогда

$$\mathrm{dhp}\, X' = \max(\mathrm{dhp}\, X - k - 1,\ 0).$$

б) Пусть комплекс

$$\ldots \to 0 \to X \to I^0 \to I^1 \to \ldots \to I^k \to X' \to 0 \to \ldots$$

ацикличен, объекты I^i инъективны. Тогда

$$\mathrm{dhi}\, X' = \max(\mathrm{dhi}\, X - k - 1,\ 0).$$

3.7.3. Следствие. а) Если в категории $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов (то есть любой объект изоморфен фактору проективного), то условие $\mathrm{dhp}\, X \leqslant k$ равносильно тому, что у X имеется проективная резольвента длины $\leqslant k+1$.

б) Если в категории $\mathscr{A}$ достаточно много инъективных объектов (то есть любой объект изоморфен подобъекту инъективного), то условие $\mathrm{dhi}\, X \leqslant k$ равносильно тому, что у X имеется инъективная резольвента длины $\leqslant k+1$.

3.8. Теорема Гильберта. В гл. 2, § 4 мы сформулировали теорему Гильберта о цепях сизигий для модулей над кольцом многочленов $k[t_1, \ldots, t_r]$. В следующей теореме будет сформулирован категорный вариант этой теоремы. В применении к модулям над $k[t_1, \ldots, t_r]$ он дает результат, немногим более слабый, чем классическая теорема, поскольку мы получим ограничение длин проективных, а не свободных резольвент.

(В действительности, над кольцом многочленов с коэффициентами в поле проективные модули конечного типа свободны. Эта нетривиальная теорема была сформулирована в качестве гипотезы Серром и доказана независимо Суслиным и Квилленом [12], [123].

Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория. Обозначим через $\mathscr{A}[T]$ следующую категорию:

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}[T]:\{\text{пары } (X, t), \text{ где } X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A},\ t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, X)\}.$$

Морфизм $(X, t) \to (X', t')$, в $\mathscr{A}[T]$ — это морфизм $f: X \to X'$ в $\mathscr{A}$ с условием $t' \circ f = f \circ t$.

3.9. Теорема. а) Категория $\mathscr{A}[T]$ абелева.

б) Предположим, что в категории $\mathscr{A}$ достаточно много проективных объектов и существуют бесконечные прямые суммы. Тогда для любого объекта $(X, t) \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}[T]$ имеем:

$$\mathrm{dhp}_{\mathscr{A}[T]}(X, t) \leqslant \mathrm{dhp}_{\mathscr{A}}(X) + 1.$$

в) В тех же условиях

$$\mathrm{dhp}_{\mathscr{A}[T]}(X, 0) = \mathrm{dhp}_{\mathscr{A}}(X) + 1. \blacksquare$$

Ясно, что утверждение п. 3.6б) следует из этой теоремы.

3.10. Производная категория и инъективные резольвенты. Последняя тема этого параграфа — описание производной категории в терминах инъективных резольвент.

Пусть $\mathscr{I}$ — полная подкатегория абелевой категории $\mathscr{A}$, состоящая из инъективных объектов. Рассмотрим категорию $K^+(\mathscr{I})$, состоящую из ограниченных слева комплексов инъективных объектов и морфизмов по модулю гомотопической эквивалентности, и естественный функтор $K^+(\mathscr{I}) \to D^+(\mathscr{A})$.

3.10.1. Теорема. а) Описанный функтор определяет эквивалентность $K^+(\mathscr{I})$ с полной подкатегорией $D^+(\mathscr{A})$.

б) Если инъективных объектов в $\mathscr{A}$ достаточно много, то он является эквивалентностью категорий.

3.10.2. План доказательства. Прежде всего, нужно проверить, что к паре категорий $K^+(\mathscr{I}) \subset K^+(\mathscr{A})$ и системе квазиизоморфизмов S в $K^+(\mathscr{A})$ применимо предложение п. 1.10. С этой целью нужно проверить следующие условия.

А. Квазиизоморфизмы в $K^+(\mathscr{I})$ образуют локализующую систему S.

Б. Условие $б_2$ предложения п. 1.10 выполнено.

После этого утверждение п. 1.10 будет означать в нашей ситуации, что $K^+(\mathscr{I})[S_{\mathscr{I}}^{-1}]$ является полной подкатегорией в $K^+(\mathscr{A})[S^{-1}] = D^+(\mathscr{A})$. (Последнее равенство есть утверждение теоремы п. 2.7б).)

В. $S_{\mathscr{I}}$ состоит из изоморфизмов. Поэтому $K^+(\mathscr{I})[S_{\mathscr{I}}^{-1}] = K^+(\mathscr{I})$.

Г. Если в $\mathscr{A}$ достаточно много инъективных объектов, то любой объект из $D^+(\mathscr{A})$ изоморфен объекту из $K^+(\mathscr{I})$.

Отметим еще, что в этом случае составной функтор $D^+(\mathscr{A}) \rightrightarrows K^+(\mathscr{I}) \to K^+(\mathscr{A})$ сопряжен справа функтору локализации $K^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{A})$.

3.11. Ext и резольвенты. Отметим, что при доказательстве утверждений Б, В предыдущего пункта естественно доказывать следующее усиление условия $б_1$ предложения 1.10.

(*) пусть $s: I^{\cdot} \to K^{\cdot}$ — квазиизоморфизм объекта $K^+(\mathscr{I})$ с объектом из $K^+(\mathscr{A})$. Тогда существует такой морфизм комплексов $t: K^{\cdot} \to I^{\cdot}$, что $t \circ s$ гомотопен id_I.

Отсюда и из двойственного утверждения для комплексов, составленных из проективных объектов, вытекает, что естественный гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathscr{A})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathscr{A})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$$

является изоморфизмом в каждом из следующих случаев:

i) $Y^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}^+(\mathscr{I})$:

ii) $X^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}^+(\mathscr{P})$ ($\mathscr{P}$ — класс проективных объектов в $\mathscr{A}$).

Из утверждений i) и ii) следует, что определение групп $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(X, Y)$ из п. 3.2.1 совпадает с определением из гл. 2, § 4: $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(X, Y)$ есть n-я группа когомологий комплекса

$$0 \to \mathrm{Hom}(P^0, Y) \to \mathrm{Hom}(P^{-1}, Y) \to \mathrm{Hom}(P^{-2}, Y) \to \ldots$$

(соответственно комплекса

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, I^0) \to \mathrm{Hom}(X, I^1) \to \mathrm{Hom}(X, I^2) \to \ldots),$$

где $\ldots \to P^{-1} \to P^0 \to X \to 0$ — проективная резольвента X (соответственно $0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to \ldots$ — инъективная резольвента Y).

3.12. Совпадение K^b и D^b. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$. Обозначим через $\mathrm{add}\,X$ полную подкатегорию $\mathscr{A}$, состоящую из конечных прямых сумм прямых слагаемых X. Ясно, что $\mathrm{add}\,X$ — аддитивная подкатегория $\mathscr{A}$. Имеется естественный функтор $\varphi_X: K^b(\mathrm{add}\,X) \to D^b(\mathscr{A})$ (композиция вложения $K^b(\mathrm{add}\,X) \to K^b(\mathscr{A})$ и локализации $Q: K^b(\mathscr{A}) \to D^b(\mathscr{A})$).

Обобщая утверждения i), ii) предыдущего пункта, можно проверить, что если $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^i(X, X) = 0$ для всех $i > 0$, то φ_X — вложение полной подкатегории. Если, кроме того, у каждого объекта $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ есть конечная резольвента (то есть комплекс, квазиизоморфный 0-комплексу Y) с членами из $\mathrm{add}\,X$, то φ_X является эквивалентностью категорий.

§ 4. Производные функторы от аддитивных функторов

4.1. Мотивировки. В п. 1.2 мы уже говорили, что важнейшие аддитивные функторы F на абелевых категориях, как Hom, $\otimes$, Г, должны быть определены заново для восстановления их точности. Подробнее, пусть $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — точный слева (соответственно справа) функтор между абелевыми категориями. В этом параграфе мы определим и исследуем его продолжения $RF: D^+(\mathscr{A}) \to D^+(\mathscr{B})$ (соответственно $LF: D^-(\mathscr{A}) \to D^-(\mathscr{B})$), которые будут называться *правым* (соответственно *левым*) *производным функтором* от F.

Функторы RF, LF будут *точны* в следующем смысле слова: они переводят *выделенные треугольники в выделенные*.

В частности, если определить классические производные функторы равенствами

$$R^iF = H^i(RF), \quad L^iF = H^i(LF),$$

то по точной тройке $0 \to A \to B \to C \to 0$ объектов из $\mathscr{A}$ строится классическая точная последовательность когомологий

$$\ldots \to R^iF(A) \to R^iF(B) \to R^iF(C) \to R^{i+1}F(A) \to \ldots$$

и аналогично для L.

Как же продолжить F на комплексы?

Первая приходящая в голову мысль состоит в том, что продолжать F на комплексы следует, применяя F почленно. При этом во всяком случае гомотопные морфизмы переходят в гомотопные, так что мы получаем функтор $K^*(F): K^*(\mathscr{A}) \to K^*(\mathscr{B})$, $* = \varnothing, +, -, \mathrm{b}$.

4.2. Предложение. а) Если F точен, то $K^+(F)$ переводит квазиизоморфизмы в квазиизоморфизмы и поэтому индуцирует функтор $D^*(F): D^*(\mathscr{A}) \to D^*(\mathscr{B})$.

б) $D^*(F)$ является точным функтором, то есть переводит выделенные треугольники в выделенные.

В самом деле, легко проверить, что $K^*(F)$ переводит ацикличные комплексы $K^\cdot$ (то есть квазиизоморфные нулю) в ацикличные.

Далее, если $f: K^\cdot \to L^\cdot$ — морфизм комплексов, то имеется канонический изоморфизм между $F(C(f))$ и $C(F(f))$. Поскольку f является квазиизоморфизмом, если и только если $C(f)$ ацикличен, комплекс $F(C(f))$ ацикличен и, значит, $F(f)$ — квазиизоморфизм.

б) Просмотр определений пп. 2.2, 2.3 показывает, что F переводит также цилиндр морфизма f в цилиндр $F(f)$ и основную диаграмму леммы п. 2.3 в аналогичную диаграмму. Это утверждение не зависит от точности F, так что любой аддитивный функтор переводит треугольники

$$K^\cdot \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \to K^\cdot[1]$$

в треугольники того же вида. При дополнительном условии точности $K^*(F)$ переводит треугольники, квазиизоморфные таким, в треугольники, квазиизоморфные таким же, то есть сохраняет свойство выделенности.

4.3. Приспособленные классы объектов. Идея конструкции RF и LF в общем случае состоит в том, чтобы применять F

почленно, но не ко всем комплексам, а только к хорошо подобранным представителям классов квазиизоморфных комплексов. Например, как мы увидим ниже, $R\Gamma$ правильно вычисляется таким способом на (ограниченных слева) комплексах инъективных пучков, а $L(M\otimes\cdot)$ — на (ограниченных справа) комплексах плоских модулей.

Мы аксиоматизируем общую ситуацию следующим способом. Назовем класс объектов $\mathscr{R}\subset\mathscr{A}$ *приспособленным* к точному (справа или слева) функтору F, если он устойчив относительно конечных прямых сумм и выполнены следующие два условия:

а) Если F точен слева, то F переводит ацикличные комплексы из $\mathrm{Kom}^+(\mathscr{R})$ в ацикличные.

Если F точен справа, то F переводит ацикличные комплексы из $\mathrm{Kom}^-(\mathscr{R})$ в ацикличные.

б) Если F точен слева, то любой объект $\mathscr{A}$ вкладывается в некоторый объект из $\mathscr{R}$. Если $\mathscr{A}$ точен справа, то любой объект является фактором некоторого объекта из $\mathscr{B}$ (мы будем говорить в таких случаях, что $\mathscr{R}$ достаточно велик или что имеется достаточно много объектов класса $\mathscr{R}$).

Заметим, что если F точен, то любой класс $\mathscr{R}$, удовлетворяющий условию б) (в частности, класс всех объектов $\mathscr{A}$), приспособлен к F.

4.4. Предложение *Пусть* $\mathscr{R}$ — приспособленный к функтору $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ класс объектов, $S_{\mathscr{R}}$ — класс квазиизоморфизмов в $K^{\pm}(\mathscr{R})$. Здесь и далее K^+ берется для точных слева F, K^- — для точных справа F). Тогда $S_{\mathscr{R}}$ является локализующей системой, и канонический функтор

$$K^{\pm}(\mathscr{R})[S_{\mathscr{R}}^{-1}]\to D^{\pm}(\mathscr{A})$$

является эквивалентностью категорий.

4.5. Конструкция производного функтора. В условиях предложения 4.4 определим производный функтор на объектах категории $K^{\pm}(\mathscr{R})[S_{\mathscr{R}}^{-1}]$ почленно:

$$RF(K^{\cdot})^i=F(K^i) \text{ для } K^{\cdot}\in K^+(\mathscr{R}),$$

$$LF(K^{\cdot})^i=F(K^i) \text{ для } K^{\cdot}\in K^-(\mathscr{R}).$$

Так как почленное применение F переводит ацикличные объекты из $K^{\pm}(\mathscr{R})$ в ацикличные, то же рассуждение, что в предложении п. 4.2 показывает, что квазиизоморфизмы переходят в квазиизоморфизмы. Поэтому можно сказать, что RF (соответственно LF) является функтором из $K^{\pm}(\mathscr{R})[S_{\mathscr{R}}^{-1}]$ в $D^{\pm}(\mathscr{B})$.

Остается выбрать эквивалентность категорий $\Phi:D^{\pm}(\mathscr{A})\to\to K^{\pm}(\mathscr{R})[S_{\mathscr{R}}^{-1}]$, обратную слева к естественному вложению, и доопределить RF, LF, положив

$$RF(K^{\cdot})=RF(\Phi(K^{\cdot})),\quad LF(K^{\cdot})=LF(\Phi(K^{\cdot}))$$

в общем случае.

Эта конструкция содержит неоднозначности — в выборе Φ, и, что более серьезно, в выборе $\mathcal{R}$. Довольно очевидно, в каком смысле она не зависит от Φ. Формулировка и доказательство независимости от $\mathcal{R}$ требует формального определения производного функтора с помощью универсального свойства.

4.6. Определение. *Производным функтором* для аддитивного точного слева функтора $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ называется пара, состоящая из точного функтора $D^+(F):D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{B})$ и морфизма функторов $\varepsilon_F: Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F)\to D^+(F)\circ Q_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{tikzcd} & D^+(\mathcal{A}) \arrow[dr, "D^+(F)"] & \\ K^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "Q_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "K^+(F)"'] & & D^+(\mathcal{B}) . \\ & K^+(\mathcal{B}) \arrow[ur, "Q_{\mathcal{B}}"'] & \end{tikzcd}$$

Эта пара должна обладать следующим универсальным свойством. Для любого точного функтора $G:D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{B})$ и морфизма функторов $\varepsilon: Q\ \circ K^+(F)\to G\circ Q_{\mathcal{A}}$ существует единственный морфизм функторов $\eta: D^+(F)\to G$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & G\circ Q_{\mathcal{A}} \\ Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F) \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_F"'] & \\ & D^+(F)\circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[uu, "\eta\circ Q_{\mathcal{A}}"'] \end{tikzcd} \quad (1)$$

Аналогично, производный функтор для точного справа функтора $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ — это пара $D^-(F):D^-(\mathcal{A})\to D^-(\mathcal{B})$ и морфизм функторов $\varepsilon_F: D^-(F)\circ Q_{\mathcal{A}}\to Q_{\mathcal{B}}\circ K^-(F)$, обладающий универсальным свойством, аналогичным (1) (с морфизмом функторов $\eta: G\to D^-(F)$). ■

Отметим, что если функтор F точен, то ввиду предложения п. 4.2б, его производный функтор $D^*(F)$ совпадает с почленным применением F к комплексам.

4.7. Единственность производного функтора. Пусть $(D^*(F), \varepsilon_F)$ и $(\tilde{D}^*(F), \varepsilon_F)$ — два производных функтора для F. В силу определения существуют и однозначно определены морфизмы функторов $D^*(F)\underset{\tilde\eta}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}}\tilde{D}^*(F)$ с указанными свойствами коммутативности. Поэтому $\tilde\eta\circ\eta$ и $\eta\circ\tilde\eta$ будут автоморфизмами $D^*(F)$, $\tilde{D}^*(F)$ соответственно. Значит, они тождественны в силу единственности. Тем самым, η и $\tilde{\eta}$ — взаимно обратные изоморфизмы функторов, которые к тому же определены однозначно.

4.8. Теорема. Если функтор F допускает приспособленный к нему класс объектов $\mathcal{R}$, то $D^{\pm}(F)$ существуют и определяются конструкцией п. 4.5 (то есть $D^{+}(F)=RF$, $D^{-}(F)=LF$).

Доказательство этой теоремы состоит в аккуратной формализации рассуждений п. 4.5.

В приложениях существенно, что некоторые классы объектов приспособлены ко всем функторам, точным с фиксированной стороны.

4.9. Теорема. Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных (соответственно проективных) объектов, то их класс приспособлен к любому точному слева (соответственно точному справа) функтору F.

Доказательство. Пусть, скажем, F точен слева, $\mathcal{I}$ — класс инъективных объектов. По определению приспособленности достаточно проверить, что F переводит ацикличные комплексы из $\mathrm{Kom}^{+}(\mathcal{I})$ в ацикличные. Пусть $I^{\cdot}$ — такой комплекс. Нулевой морфизм $0: I^{\cdot}\to I^{\cdot}$ является квазиизоморфизмом. В силу утверждения (*) из п. 3.12 он гомотопен id_{I}. Поэтому нулевой морфизм $F(I^{\cdot})$ гомотопен $\mathrm{id}_{F(I^{\cdot})}$. Следовательно, $F(I^{\cdot})$ ацикличен.

До сих пор мы выводим существование производного функтора из наличия приспособленного класса. Частичное обращение этого рассуждения таково.

Пусть $D^{\pm}(F)$ существует. Назовем объект X *F-ацикличным*, если $D^{i}F(X)=0$ при всех $i\neq 0$. В этих условиях справедлива

4.10. Теорема. а) Для существования приспособленного к F класса объектов необходимо и достаточно, чтобы класс $\mathcal{Z}$ F-ацикличных объектов был достаточно большим, то есть чтобы каждый объект был подобъектом ацикличного (для лево-точного F) или факторобъектом ацикличного (для право-точного F).

б) Если F достаточно велик, то любой класс приспособленных к F объектов лежит в $\mathcal{Z}$ и любой достаточно большой подкласс $\mathcal{Z}$ приспособлен к F.

в) Если F достаточно велик, то все инъективные (для лево-точных F) или проективные (для право-точных F) объекты лежат в $\mathcal{Z}$.

Доказательство. Пусть класс приспособленных к F объектов $\mathcal{R}$ существует. По конструкции п. 4.5, $DF(X[0])$ квазиизоморфен $F(X)[0]$ для всех $X\in\mathcal{R}$. Поэтому $\mathcal{R}\subset\mathcal{Z}$, и $\mathcal{Z}$ достаточно большой.

Наоборот, пусть $\mathcal{R}$ — любой достаточно большой подкласс $\mathcal{Z}$. Чтобы установить его допустимость, достаточно проверить, что F переводит ацикличные комплексы из $\mathrm{Kom}^{\pm}(\mathcal{R})$ в ацикличные. Пусть, скажем, F точен слева. Если ацикличный комплекс из F-ацикличных объектов является тройкой $\ldots\to 0\to K^{0}\to$

$\to K^1 \to K^2 \to 0 \to \ldots$, то точность $0 \to F(K^0) \to F(K^1) \to F(K^2) \to 0$ следует из $D^1F(K^0)=0$. В общем случае можно последовательно отщеплять точные тройки. Полагая $X^i = \operatorname{Im} d^i$, $X^0 = K^0$, имеем точные тройки

$$0 \to K^0 \to K^1 \to X^1 \to 0,\ 0 \to X^1 \to K^2 \to X^2 \to 0, \ldots$$

Далее $X^{i+1} \in \mathscr{Z}$, ибо X^i, $K^{i+1} \in \mathscr{Z}$. Поэтому тройки $0 \to F(X^i) \to F(K^{i+1}) \to F(X^{i+1}) \to 0$ точны, так что $F(K^\cdot)$ точен.

Наконец, пусть $\mathscr{Z}$ — достаточно большой и F по-прежнему точен слева. Вложим инъективный объект I в ацикличный X. Из диаграммы инъективности

$$\begin{tikzcd} I & & \\ X \arrow[u, dashed, "\varphi"] & I \arrow[l] \arrow[ul, "id"'] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

следует, что φ выделяет I прямым слагаемым в X. Так как F аддитивен, $D^iF(I)$ является прямым слагаемым в $D^iF(X)=0$ при $i \neq 0$.

4.11. Классические производные функторы.

а) Функтор H из производной (или гомотопической) категории в абелеву называется *когомологическим*, если он переводит любой выделенный треугольник в $X \to Y \to Z \to X[1]$ точную последовательность

$$\ldots \to H(T^iX) \to H(T^iY) \to H(T^iZ) \to H(T^{i+1}X) \to \ldots$$

Например, $H = H^0$ — когомологический функтор (см. п. 2.4 и гл. 1, п. 1.5.1). Другой пример: $H = \operatorname{Hom}(U, \cdot)$ (см. ниже гл. 5, п. 1.3)

б) Пусть F — точный слева (соответственно справа) функтор из одной абелевой категории в другую. Тогда $R^iF = H^0(T^iD^+(F)) = H^i(D^+(F))$ (соответственно $L^iF = H^i(D^-)(F))$) есть классический i-й производный функтор от F (см. гл. 2, п. 4). Нетрудно убедиться, что $R^iF=0$ при $i<0$, $R^0F=F$ (соответственно $L^iF=0$ при $i>0$, $L^0F=0$). Примеры см. в гл. 2, § 4.

4.12. Слабые производные функторы. Изложим теперь другой вариант конструкции производных функторов. Он обеспечивает существование, скажем, RF, в более общих предположениях, но зато значения RF лежат априори не в производной категории, а в некотором ее расширении.

4.12.1. Категории коиндексов. Назовем категорию I *категорией коиндексов*, если она мала, непуста и ее стрелки удовлетворяют следующим аксиомам.

а) I связна, то есть любые два объекта можно соединить последовательностью стрелок (направления безразличны).

б) Любую пару морфизмов $j' \leftarrow i \to j$ можно включить в коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d] & j \arrow[d, dashed] \\ j' \arrow[r, dashed] & k \end{tikzcd},$$

в) Любую пару морфизмов $i \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} j$ можно дополнить морфизмом $j \xrightarrow{k} w$ так, что $w \circ u = w \circ v$.

Категория J называется *категорией индексов*, если J^0 — категория коиндексов.

4.12.2. Индуктивные пределы. Пусть I — категория коиндексов, $F: I \to \mathscr{C}$, $i \mapsto X_i$ — некоторый функтор. Он задает функтор $\widehat{F}: I \to \widehat{\mathscr{C}} = \mathrm{Funct}(\mathscr{C}^0, \mathscr{S}et)$ равенством

$$\widehat{F}(i)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(i)), \quad Y \in Ob\,\mathscr{C}^0 = Ob\,\mathscr{C}, \quad i \in Ob\,I.$$

Определим объект L категории $\widehat{\mathscr{C}}$ как индуктивный предел $L = \varinjlim \widehat{F}$ (см. гл. 2, п. 1.21), так что для любого $Y \in Ob\,\mathscr{C}^0$

$$L(Y) = \varinjlim F_Y,$$

где $F_Y: I \to \mathscr{S}et$, $F_Y(i) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(i))$. Существование L вытекает из существования для любого Y индуктивного предела $\varinjlim F_Y$ в категории $\mathscr{S}et$.

Такие функторы L (для всевозможных I и F) образуют полную подкатегорию $\mathrm{Ind}\,\mathscr{C}$ в $\widehat{\mathscr{C}}$, называемую *категорией индуктивных пределов* в $\mathscr{C}$.

Определим *категорию проективных пределов* $\mathrm{Pro}\,\mathscr{C}$ как $(\mathrm{Ind}\,\mathscr{C}^0)^0$. Это — подкатегория $((\mathscr{C}^0)^\wedge)^0$. В этой категории можно брать пределы функторов вида $J \to \mathscr{C}$, где J — категория индексов.

4.12.3. Индуктивные пределы и локализация. Пусть S — локализующий класс морфизмов в категории $\mathscr{C}$. Назовем его *насыщенным*, если любой морфизм, являющийся левым и правым делителем некоторых морфизмов из S, принадлежит S.

Для любого объекта $X \in Ob\,\mathscr{C}$ категория I_X морфизмов $X \xrightarrow{s} X'$, $s \in S$ является категорией коиндексов, а категория J_X морфизмов $X' \xrightarrow{s} X$ — категорией индексов. Положим

$$X^+ = \varinjlim_{I_X} X', \quad X^- = \varprojlim_{J_X} X'.$$

Пусть S насыщен. Отображения $X \to X^\pm$ продолжаются до функторов $\mathscr{C} \to \mathrm{Ind}\,\mathscr{C}$ и $\mathscr{C} \to \mathrm{Pro}\,\mathscr{C}$, которые превращают стрелки из S в изоморфизмы. Поэтому они определяют канонические функторы $\mathscr{C}[S^{-1}] \to \mathrm{Ind}\,\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}[S^{-1}] \to \mathrm{Pro}\,\mathscr{C}$.

4.12.4. Определение. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ — две абелевых категории, F — аддитивный функтор из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$. Тем же символом F обозначим почленное продолжение F до функтора $K^*(\mathscr{A}) \to K^*(\mathscr{B})$. Пусть $S_{\mathscr{A}}$ (соответственно $S_{\mathscr{B}}$) — квазиизоморфизмы в $K^*(\mathscr{A})$ (соответственно $K^*(\mathscr{B})$). Назовем *слабым правым производным функтором* $R_wF: K^*(\mathscr{A})[S_{\mathscr{A}}^{-1}] = D^*(\mathscr{A}) \to \operatorname{Ind} K^*(\mathscr{B})[S_{\mathscr{B}}^{-1}] = \operatorname{Ind} D^*(\mathscr{B})$ функтор, который делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K^*(\mathscr{A}) & \xrightarrow{X \mapsto F(X^+)} & \operatorname{Ind} K^*(\mathscr{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^*(\mathscr{A})[S_{\mathscr{A}}^{-1}] & \xrightarrow{R_wF} & \operatorname{Ind} K^*(\mathscr{B})[S_{\mathscr{B}}^{-1}], \end{array}$$

где $F(X^+) = \varinjlim\limits_{I_X} F(X')$.

Если R_wF принимает значения в подкатегории $\operatorname{Ind} D^*(F)$, состоящей из представимых объектов, то он «совпадает» с RF.

Объект $X \in K^*(\mathscr{A})$ называется *F-ацикличным справа*, если канонический морфизм $F(X) \to R_wF(X)$ является изоморфизмом.

Слабый левый производный функтор определяется аналогично с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K^*(\mathscr{A}) & \xrightarrow{X \mapsto F(X^-)} & \operatorname{Pro} K^*(\mathscr{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^*(\mathscr{A})[S_{\mathscr{A}}^{-1}] & \xrightarrow{L_wF} & \operatorname{Pro} K^*(\mathscr{B})[S_{\mathscr{B}}^{-1}]. \end{array}$$

4.12.5. Связь с производными функторами. В ситуации предыдущего пункта предположим, что любой объект из $\mathscr{A}$ является фактором (соответственно подобъектом) некоторого объекта, F-ацикличного слева (соответственно F-ацикличного справа). Тогда функтор L_wF на $D^-(\mathscr{A})$ (соответственно функтор R_wF на $D^+(\mathscr{A})$) принимает значения в $D^-(\mathscr{B})$ (соответственно в $D^+(\mathscr{B})$) и потому «совпадает» с LF (соответственно RF).

4.13. Точность функтора $\varprojlim$. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, в которой существуют счетные прямые произведения, $\mathscr{C}(\mathbf{Z}^+)$ — категория, отвечающая упорядоченному множеству натуральных чисел (см. гл. 2, п. 1.23). Тогда справедливы следующие утверждения:

а) Категория $\mathscr{A}^{\mathbf{Z}^+} = \operatorname{Funct}(\mathscr{C}(\mathbf{Z}^+), \mathscr{A}^0)$ абелева.

б) Функтор $\varprojlim: \mathscr{A}^{\mathbf{Z}^+} \to \mathscr{A}$ точен слева.

в) Назовем объект $X = (X_i, p_{ij}) \in \mathscr{A}^{\mathbf{Z}^+}$ удовлетворяющим *условию ML* (Миттаг — Лефлера), если для каждого i существует $j > i$ такое, что $p_{ij}: X_j \to X_i$ — эпиморфизм. Тогда класс объектов X, удовлетворяющих условию ML, приспособлен к функтору $\varprojlim$.

г) Если $0 \to X \to S \to Y \to 0$ — точная последовательность в $\mathscr{A}^{\mathbf{Z}^+}$ и S удовлетворяет условию ML, то и Y удовлетворяет условию ML. Отсюда следует, что правые производные функторы $R^i \varprojlim$ для $\varprojlim$ равны 0 при $i \geqslant 2$.

4.14. Неограниченные комплексы. Ниже излагаются некоторые результаты Спалтенстейна [135], позволяющие работать с неограниченными комплексами в производной категории.

Левой проективной резольвентой комплекса $A^\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ называется квазиизоморфизм $P^\cdot \to A^\cdot$, где все P^i проективны в $\mathscr{A}$. Аналогично определяется правая инъективная резольвента.

Теорема п. 3.10.1 (и ее аналог для проективных резольвент) утверждает, что каждый комплекс $A^\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}^+(\mathscr{A})$ (соответственно $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}^-(\mathscr{A})$) имеет единственную с точностью до гомотопической эквивалентности правую инъективную (соответственно левую проективную) резольвенту.

Если не предполагать ограниченности справа или слева, то единственность может нарушаться: для $A = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$-mod комплекс

$$P^\cdot\colon \ldots \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \ldots$$

ацикличен и состоит из свободных $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$-модулей. Поэтому он является левой инъективной резольвентой нулевого комплекса $0^\cdot$. Однако морфизм $P^\cdot \to 0^\cdot$ не является гомотопической эквивалентностью: после тензорного умножения на $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ получаем комплекс

$$P^\cdot \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\colon \ldots \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \ldots,$$

имеющий ненулевые когомологии и значит гомотопически не эквивалентный $0^\cdot$.

4.14.1. Определение. Назовем комплекс $P^\cdot$ *$K^\cdot$-проективным*, если для любого ацикличного комплекса $A^\cdot$ комплекс абелевых групп $\mathrm{Hom}^\cdot(P^\cdot, A^\cdot)$ ацикличен. Аналогично определяетс *$K^\cdot$-инъективный комплекс* $I^\cdot$ (с помощью $\mathrm{Hom}^\cdot(A^\cdot, I^\cdot)$).

4.14.2. Свойства $K^\cdot$-проективных комплексов.

а) Пусть $A^\cdot$ — 0-комплекс (то есть $A^i = 0$ при $i \neq 0$). Тогда $A^\cdot$ K-проективен в том и только том случае, если A^0 проективен в $\mathscr{A}$.

б) Если две вершины выделенного треугольника в $D(\mathscr{A})$ являются K-проективными, то и третья также K-проективна.

в) Для $P^\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ следующие условия эквивалентны:

(i) $P^\cdot$ K-проективен.

(ii) Для любого $A^\cdot \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ естественный гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathscr{A})}(P^{\cdot}, A^{\cdot}) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathscr{A})}(P^{\cdot}, A^{\cdot})$$

является изоморфизмом.

(iii) Каждый квазиизоморфизм $s: A^{\cdot} \to P^{\cdot}$ обладает правым обратным $t: P^{\cdot} \to A^{\cdot}$ в $K(\mathscr{A})$.

г) K-проективной резольвентой (левой) комплекса $A^{\cdot}$ называется квазиизоморфизм $P^{\cdot} \to A^{\cdot}$ с K-проективным $P^{\cdot}$. Такая K-проективная резольвента единственна (если она существует) с точностью до гомотопической эквивалентности. Если $A^{\cdot} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}^{-}(\mathscr{A}))$ и в $\mathscr{A}$ достаточно проективных объектов, то K-проективная резольвента — это левая проективная резольвента $A^{\cdot}$.

Аналогичные результаты справедливы для K-инъективных (правых) резольвент.

4.14.3. Ввиду свойства г) предыдущего пункта K-проективные и K-инъективные резольвенты можно использовать для вычисления производных функторов на неограниченных объектах. В частности, $R\,\mathrm{Hom}(A^{\cdot}, B^{\cdot})$ можно вычислять с помощью K-проективной резольвенты $A^{\cdot}$ или K-инъективной резольвенты $B^{\cdot}$.

Относительно существования K-резольвент в работе Спалтенстейна [135] доказаны следующие результаты.

а) Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, $\mathscr{A} = R\text{-mod}$. Тогда каждый комплекс $A^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Kom}(\mathscr{A})$ обладает K-проективной и K-инъективной резольвентой.

б) Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на топологическом пространстве X и $\mathscr{A}$ — категория пучков $\mathcal{O}$-модулей. Тогда каждый комплекс $A^{\cdot}$ обладает K-инъективной резольвентой.

4.14.4. Аналогично можно определить и доказать существование K-плоских резольвент (используемых для вычисления производных функторов от тензорного произведения), K-мягких резольвент (используемых для вычисления $Rf_!$, см. следующий параграф) и т. д.

4.15. Производный функтор композиции и спектральная последовательность. Сформулированная в гл. 2, п. 4 теорема о спектральной последовательности Гротендика, связанной с композицией двух точных слева функторов, имеет следующую естественную интерпретацию в терминах производных категорий и производных функторов.

4.15.1. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ — три абелевых категории, $F: \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ и $G: \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ — аддитивные точные слева функторы. Пусть $\mathscr{R}_{\mathscr{A}} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ (соответственно $\mathscr{R}_{\mathscr{B}} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$) — класс объектов, приспособленный к $\mathscr{A}$ (соответственно к $\mathscr{B}$). Пусть, сверх того, $F(\mathscr{R}_{\mathscr{A}}) \subset \mathscr{R}_{\mathscr{B}}$. В таком случае производные функторы RF, RG и

$F(G\cdot F):D^+(\cdot)\to D^+(\cdot)$ определены, и естественный морфизм функторов $R(G\circ F)\to RG\circ RF$ является изоморфизмом.

Доказательство. Из определения приспособленности в п. 4.3 и условий теоремы ясно, что $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ приспособлен не только к F, но и к $G\circ F$. Поэтому RF, RG и $R(G\circ F)$ существуют, и их можно вычислять с помощью конструкции п. 4.5.

Поскольку RG и RF точные функторы, композиция $RG\circ RF$ также точна, и морфизм функторов $E:R(G\circ F)\to RG\circ RF$ определен по свойству универсальности п. 4.6.

Если $K^\cdot\in\mathrm{Ob\,Kom}^+(\mathcal{R}_{\mathcal{A}})$, то по конструкции морфизм $E(K^\cdot)$: $:R(G\circ F)(K^\cdot)\to RG\circ RF(K^\cdot)$ является изоморфизмом. Поскольку любой объект $D^+(\mathcal{A})$ изоморфен такому $K^\cdot$, E является изоморфизмом функторов. ■

Аналогичный результат верен для функторов, точных справа.

§ 5. Когомологии пучков

5.1. Предложение. Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{R}$ — пучок колец с единицей на X. Тогда любой пучок $\mathcal{R}$-модулей вкладывается в инъективный пучок $\mathcal{R}$-модулей.

Доказательство основано на следующем стандартном методе Годемана. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{R}$-модулей (скажем, левых). Для каждой точки $x\in X$ построим вложение $\mathcal{F}_x\hookrightarrow I(x)$ $\mathcal{R}_x$-модулей, где $I(x)$ инъективен над $\mathcal{R}_x$. Определим далее пучок $\mathcal{R}$-модулей $\mathcal{J}$ формулой

$$\mathcal{J}(U)=\prod_{x\in U}I(x)$$

(с естественными операциями ограничения). Имеется очевидное вложение $\mathcal{F}\subset\mathcal{J}$ и несложно проверить, что $\mathcal{J}$ инъективен.

5.2. Прямые образы и когомологии. Предложение п. 5.1 позволяет строить производный функтор для прямого образа в следующей ситуации. Пусть $(f,\varphi):(X,\mathcal{R}_X)\to(Y,\mathcal{R}_Y)$ — морфизм окольцованных пространств, где $\varphi:\mathcal{R}_Y\to f_*(\mathcal{R}_X)$ — морфизм пучков модулей. Тогда для любого $\mathcal{F}\in\mathcal{R}_X\text{-mod}$ пучок $f_*(\mathcal{F})$ снабжается естественной структурой $\mathcal{R}_Y$-модуля с помощью φ и **функтор** $f_*:\mathcal{R}_X\text{-mod}\to\mathcal{R}_Y\text{-mod}$ точен слева. Поэтому мы можем построить производный функтор

$$Rf_*:D^+(\mathcal{R}_X\text{-mod})\to D^+(\mathcal{R}_Y\text{-mod}).$$

В частности, когда $Y=\{\text{точка}\}$, $\mathcal{R}_Y=\mathbf{Z}$, мы получаем производный функтор $R\Gamma:D^+(\mathcal{R}_X\text{-mod})\to D^+(\mathcal{A}b)$ и $R^i\Gamma(\mathcal{F})=H^i(X,\mathcal{F})$ — *когомологии X с коэффициентами в $\mathcal{F}$.*

5.3. Теорема. а) *Пусть* $\Phi:\mathcal{R}_X\text{-mod}\to\mathcal{P}\mathcal{A}b$ — функтор забвения структуры $\mathcal{R}_X$-модуля. Тогда функторы $R\Gamma$ и $R(\Gamma\circ\Phi)$ естественно изоморфизмы. Иными словами, все равно, вычислять ли $H^i(X, \mathcal{F})$, считая $\mathcal{F}$ $\mathcal{R}_X$-модулем или просто пучком абелевых групп.

б) Пусть $X = \bigcup X_i$ — открытое покрытие, для которого $H^q(U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_q}, \mathcal{F}) = 0$ при всех $q > 0$, $p \geqslant 1$. Тогда $H^i(X, \mathcal{F})$ совпадает с i-мерными когомологиями Чеха этого покрытия с коэффициентами в $\mathcal{F}$ (см. гл. 1, п. 2.6).

в) $H^i(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{R}_X\text{-mod}}(\mathcal{R}_X, \mathcal{F})$.

г) Пусть $f: X \to Y$ — некоторое отображение. Тогда $R^i f_*(\mathcal{F})$ естественно изоморфен пучку, ассоциированному с предпучком $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$.

д) Пусть $X \to Y \to Z$ — три пространства и два отображения, $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{R}_X$-модулей. К $R^{p+q}(gf)_*(\mathcal{F})$ сходится спектральная последовательность с $E_2^{pq} = R^p g_*(R^q f_*(\mathcal{F}))$; она функториальна по $\mathcal{F}$.

5.4. О доказательстве теоремы п. 5.3. Мы прокомментируем здесь доказательство частей а) и д).

5.4.1. Вялые пучки; доказательство п. 5.3а. Очевидно, $\Gamma = \Gamma \circ \Phi$ (как функторы $\mathcal{R}_X$-Mod$\to\mathcal{Ab}$). Поэтому $R\Gamma = R(\Gamma \circ \Phi)$. Мы покажем сейчас, что можно применить теорему п. 4.15.1 и получить естественный изоморфизм $R(\Gamma \circ \Phi) = R\Gamma \circ R\Phi$. Отсюда будет следовать требуемое, поскольку Φ точен и, значит, $R\Phi$ совпадает с почленным применением Φ.

Чтобы иметь возможность применить теорему п. 4.15.1, нужно показать, что некоторый класс пучков $\mathcal{R}_X$-модулей, приспособленный к Φ, после применения Φ переходит в класс пучков, приспособленный к Γ. В качестве первого класса выберем инъективные пучки $\mathcal{R}_X$-модулей, в качестве второго — вялые пучки абелевых групп. Напомним, что *вялость* $\mathcal{F}$, по определению, означает сюръективность всех отображений $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$, где U открыто. Для проверки всех нужных свойств нужно доказать следующие факты.

а) Любой пучок $\mathcal{F}$ абелевых групп является подпучком вялого пучка. Если $\mathcal{F}$ — инъективный пучок $\mathcal{R}_X$-модулей, то он вял.

б) Пусть
$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0 \tag{1}$$
— точная последовательность пучков абелевых групп и $\mathcal{F}$ вял. Тогда последовательность
$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H}) \to 0 \tag{2}$$
точна.

в) Если в последовательности (1) пучки $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ вялые, то и $\mathcal{H}$ вял.

г) Γ переводит ограниченный слева ацикличный комплекс вялых пучков в ацикличный комплекс абелевых групп.

5.4.2. Доказательство теоремы 3д). Прежде всего, согласно условию а) теоремы, утверждение можно доказывать в категории $\mathcal{SAb}$ пучков абелевых групп. Применим теорему гл. 2, п. 4.5.2 к паре функторов $F=f_{\cdot}$, $G=g_{\cdot}$. Возможность применения теоремы гл. 2, п. 4.5.2 в этой ситуации обеспечивается тем, что $f_{\cdot}$ переводит инъективные пучки на X в инъективные пучки на Y. В самом деле, инъективные пучки $\mathcal{F}$ характеризуются тем, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}', \mathcal{F})$ — эпиморфизм для каждого мономорфизма $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$. Но согласно гл. 3, п. 3.13.1 $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_{\cdot}(\mathcal{F})) = \mathrm{Hom}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ и согласно гл. 3, п. 3.14.1, а), $f^{\cdot}$ — точный функтор, то есть переводит мономорфизмы в мономорфизмы. Поэтому $f_{\cdot}\mathcal{F}$ инъективен вместе с $\mathcal{F}$.

5.5. Функтор $\Gamma_{[Z]}$. Каноническое разложение. Пусть $i: Z \to X$ — замкнутое вложение, $j: U \to X$ — вложение дополнительного открытого множества. Рассмотрим функтор $\Gamma_{[Z]}: \mathcal{SAb}_X \to \mathcal{SAb}_X$, задаваемый формулой $\Gamma_{[Z]}(\mathcal{F})(V) = \{\xi \in \mathcal{F}(V),\ \mathrm{supp}\, \xi \subset Z\}$. Этот функтор точен слева и для произвольного пучка $\mathcal{F}$ имеется точная последовательность

$$0 \to \Gamma_{[Z]}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} j_{\cdot}j^{\cdot}(\mathcal{F}).$$

Если $\mathcal{F}$ — инъективный пучок абелевых групп, то α — эпиморфизм. Поэтому в $D^b(\mathcal{SAb}_X)$ имеем выделенный треугольник

$$R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to Rj_{\cdot}j^{\cdot}(\mathcal{F}) \to R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{F})[1].$$

Этот треугольник называется *каноническим разложением пучка* $\mathcal{F}$ относительно пары (U, Z).

5.6. Тензорные произведения и плоские пучки. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец с единицей на пространстве X. Для любого пучка левых $\mathcal{R}$-модулей $\mathcal{N}$ определен функтор

$$\cdot \otimes \mathcal{N}: \text{mod-}\mathcal{R} \to \mathcal{SAb}_X, \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \underset{\mathcal{R}}{\otimes} \mathcal{N}.$$

Аналогично соответствующему утверждению для колец, можно доказать, что этот функтор точен справа.

Назовем пучок $\mathcal{M}$ *плоским* (над $\mathcal{R}$), если функтор $\cdot \otimes \mathcal{N}$ точен. Легко проверить, что пучок $\mathcal{N}$ является плоским тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ его слой $\mathcal{N}_x$ является плоским модулем над кольцом $\mathcal{R}_x$.

5.6.1. Предложение. а) Любой пучок левых $\mathcal{R}$-модулей является факторпучком плоского пучка.

б) Класс плоских пучков приспособлен к функтору

$$\mathcal{M} \otimes \cdot : \mathcal{R}\text{-mod} \to \mathcal{SAb}_X$$

тензорного умножения на пучок правых $\mathcal{R}$-модулей.

5.7. Обратные образы и тензорные произведения. В силу предыдущего предложения мы можем построить производный функтор

$$\mathcal{M} \overset{L}{\otimes} \cdot : D^-(\mathcal{R}\text{-mod}) \to D^-(\mathcal{SAb}_X).$$

Его когомологии обозначаются Tor:

$$\operatorname{Tor}_i(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = H^{-i}(\mathscr{M} \overset{L}{\otimes} \mathscr{N}).$$

Можно также определить функтор

$$\mathscr{M}^{\cdot} \overset{L}{\otimes} \cdot : D^-(\mathscr{R}\text{-mod}) \to D^-(\mathscr{S}\mathscr{A}b_X)$$

для $\mathscr{M}^{\cdot} \in D^-(\text{mod-}\mathscr{R})$.

Аналогично определяются функторы

$$\cdot \overset{L}{\otimes} \mathscr{N}, \quad \cdot \overset{L}{\otimes} \mathscr{N}^{\cdot} : D^-(\text{mod-}\mathscr{R}) \to D^-(\mathscr{S}\mathscr{A}b_X),$$

для $\mathscr{N} \in \mathscr{R}\text{-mod}$, $\mathscr{N}^{\cdot} \in D^-(\mathscr{R}\text{-mod})$, а также бифунктор

$$\cdot \overset{L}{\otimes} \cdot : D^-(\text{mod-}\mathscr{R}) \otimes D^-(\mathscr{R}\text{-mod}) \to D^-(\mathscr{S}\mathscr{A}b_X).$$

Так же, как для модулей над кольцами, можно доказать, что пучок $\operatorname{Tor}_i(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ не зависит от того, определять ли его с помощью $\mathscr{M} \overset{L}{\otimes} \cdot$, $\cdot \overset{L}{\otimes} \mathscr{N}$ или $\cdot \overset{L}{\otimes} \cdot$. Если $\mathscr{R}$ — пучок коммутативных (или суперкоммутативных) колец, то левые $\mathscr{R}$-модули отождествляются с правыми и $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ имеет структуру $\mathscr{R}$-модуля, так что $\mathscr{M} \overset{L}{\otimes} \cdot$ принимает значения в $D^-(\mathscr{R}\text{-mod})$.

Пусть, далее, $(f, \varphi) : (X, \mathscr{R}_X) \to (Y, \mathscr{R}_Y)$ — морфизм пространств, окольцованных пучками (супер) коммутативных колец. Тогда, для любого пучка $\mathscr{R}_Y$-модулей $\mathscr{F}$ определен пучок $\mathscr{R}_X$-модулей

$$f^*(\mathscr{F}) = \mathscr{R}_X \underset{f^{\cdot}(\mathscr{R}_Y)}{\otimes} f^{\cdot}(\mathscr{F}).$$

Производный функтор

$$Lf^*(\mathscr{F}) = \mathscr{R}_X \underset{f^{\cdot}(\mathscr{R}_Y)}{\overset{L}{\otimes}} f^{\cdot}(\mathscr{F})$$

определяет функторы высших обратных образов

$$L_i f^*(\mathscr{F}) = H^{-i}\left(\mathscr{R}_X \underset{f^{\cdot}(\mathscr{R}_Y)}{\overset{L}{\otimes}} f^{\cdot}(\mathscr{F})\right).$$

Морфизм (f, φ) называется *плоским*, если $\mathscr{R}_X$ — плоский $f^{\cdot}(\mathscr{R}_Y)$-модуль. Это свойство представляет собой одно из самых слабых и одновременно самых полезных аналогов понятия «локально тривиального расслоения». Оно особенно употребительно в алгебраической и аналитической геометрии.

5.8. Прямые образы с компактными носителями. Ниже до конца этого параграфа мы будем работать только с локально компактными отделимыми топологическими пространствами и пучками абелевых групп на них. Кроме того, позже мы наложим некоторые условия конечномерности, которым, в частности, удовлетворяют все топологические многообразия. В этих условиях по каждому морфизму пространств $f: X \to Y$ будут построены функторы $Rf_!$ и $f^!$ на подходящих производных категориях.

5.8.1. Определение-лемма. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм локально компактных пространств. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X. Положим для любого открытого множества $U \subset Y$:

$$f_!(\mathcal{F})(U) = \{s \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}),\ \operatorname{supp}(s) \xrightarrow{j} U \text{ собствен}\}$$

(напомним, что морфизм называется собственным, если прообраз любого компакта компактен). Тогда

а) $f_!(\mathcal{F})$ есть подпучок $f_\cdot(\mathcal{F})$.

б) Отображение $\mathcal{F} \to f_!(\mathcal{F})$ продолжается до функтора, точного слева.

5.9. Сечения с компактным носителем. Важный частный случай возникает, когда $f: X \to pt$ — отображение в точку. В этом случае $f_!(\mathcal{F})$ — это абелева группа, состоящая из таких сечений $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, что $\operatorname{supp}(s)$ — компакт в X. Эта группа называется *группой сечений* $\mathcal{F}$ *с компактными носителями* и обозначается $\Gamma_c(X, \mathcal{F})$.

Пучок $f_!(\mathcal{F})$ для произвольного $f: X \to Y$ по существу восстанавливается по группам сечений $\mathcal{F}$ с компактными носителями над различными подмножествами X. Точнее, имеется

5.9.1. Предложение. Слой пучка $f_!(\mathcal{F})$ в точке $y \in Y$ изоморфен $\Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$.

5.10. Пучки, приспособленные к $f_!$. Пучок $\mathcal{F}$ на X называется *мягким*, если для любого замкнутого множества $K \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(K, \mathcal{F})$ сюръективно.

Поскольку любой инъективный пучок является вялым (п. 5.4а), а любой вялый пучок, очевидно, является мягким, мягких пучков достаточно много.

5.10.1. Предложение. Класс мягких пучков приспособлен к функтору $f_!$.

Доказательство по существу параллельно доказательству а) теоремы 5.3. Основным этапом является проверка следующего факта: Для точной последовательности мягких пучков (1) отображение $\Gamma_c(X, \mathcal{G}) \to \Gamma_c(X, \mathcal{H})$ — эпиморфизм.

Докажем его. Пусть $s \in \Gamma_c(X, \mathcal{H})$ и K — компакт, содержащий $\operatorname{supp}(s)$. Покроем K конечным числом компактов $K_1, \ldots, K_n$, таким образом, что $s|_{K_i}$ поднимается до сечения $t_i \in \Gamma(K_i, \mathcal{G}) \subset \Gamma_c(X, \mathcal{G})$. Положим $L_i = K_1 \cup \ldots \cup K_i$ и индукцией по i докажем что существует сечение $r_i \in \Gamma(L_i, \mathcal{G})$, проектирующееся в $s|_{L_i}$. Предположим, что r_{i-1} уже построено. Положим $v = r_{i-1}|_{L_{i-1} \cap K_i} - t_i|_{L_{i-1} \cap K_i}$. Имеем $\psi(v) = 0$, так что $v = \varphi(v')$ для некоторого $v' \in \Gamma(L_{i-1} \cap K_i, \mathcal{F})$. Продолжим v' до сечения v'' пучка $\mathcal{F}$ над K_i (используем мягкость $\mathcal{F}$) и положим $t'_i = t_i + \varphi(v'')$. Тогда t'_i и r_{i-1} имеют одно и то же ограничение на $L_{i-1}\cap K_i$, так что они склеиваются в искомое сечение r_i пучка $\mathcal{G}$ над $L_i=L_{i-1}\cup K_i$.

Таким образом, мы нашли сечение $r\in\Gamma(K, \mathcal{G})$ с $\psi(r)=s$. Пусть M — граница K. Тогда $\psi(r|_M)=0$, то есть $r|_M=\varphi(u)$ для некоторого $u\in\Gamma(M,\mathcal{F})$. Поскольку $\mathcal{F}$ — мягкий, и продолжается до $u'\in\Gamma(K, \mathcal{F})$. Тогда $r'=r-\varphi(u')|_M$, то есть r' можно продолжить нулем вне K, получая $s'\in\Gamma_c(X, \mathcal{G})$ с $\psi(r')=s$.

Заметим, что при доказательстве мы использовали лишь, что $\mathcal{F}$ — мягкий пучок.

5.11. Высшие прямые образы с компактными носителями. Предыдущее предложение позволяет определить правый производный функтор

$$Rf_!\colon D^+(\mathcal{SA}b_X)\to D^+(\mathcal{SA}b_Y).$$

Его когомологии называются *высшими прямыми образами с компактными носителями* и обозначаются $R^if_!(\mathcal{F})\in\mathcal{SA}b_Y$ для $\mathcal{F}\in\mathcal{SA}b_X$.

В частности, для отображения в точку $f\colon X\to pt$ получаем функтор

$$R\Gamma_c\colon D^+(\mathcal{SA}b_X)\to D^+(\mathcal{A}b)$$

и его когомологии $H^i_c(X, \mathcal{F})$ (*когомологии* $\mathcal{F}$ *с компактными носителями*).

Перечислим ряд свойств $Rf_!$.

а) Слой $R^if_!(\mathcal{F})$ в точке $y\in Y$ канонически изоморфен $H^i_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$. Это следует из предложения п. 5.9 и того, что ограничение на $f^{-1}(y)$ переводит мягкие пучки в мягкие.

б) Для непрерывных отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ имеем

$$R(gf)_!=Rg_!\circ Rf_! \tag{3}$$

(это вытекает из того, что $f_!$ переводит мягкие пучки в мягкие).

Используя результаты гл. 2, § 4, равенство (3) можно записать в виде спектральной последовательности, связывающей $R^pf_!$, $R^qg_!$ и $R^n(gf)_!$.

5.12. Обратный образ с компактным носителем. Согласно общей идеологии (см. гл. 2, п. 3.13), обратный образ $f^!$ с компактным носителем для $f\colon X\to Y$ нужно определять как функтор на категории пучков на Y, сопряженный к $f_!$. Оказывается, однако, что для общего отображения f функтор $f\colon\mathcal{SA}b_X\to\mathcal{SA}b_Y$ не имеет сопряженного, и для определения $f^!$ следует перейти к производной категории. Кроме того, X и Y следует предполагать конечномерными.

5.12.1. Теорема. Пусть $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение локально компактных конечномерных топологических пространств. Существует функтор

$$f^{!}: D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y) \to D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$$

и функториальный по $\mathcal{F}^{\cdot} \in (D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X))^0$, $\mathcal{G}^{\cdot} \in D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$ изоморфизм $D^{+}(\mathcal{A}b)$

$$R\mathrm{Hom}(Rf_{!}\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G})^{\cdot} \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\cdot}, f^{!}\mathcal{G}^{\cdot}).$$

5.12.2. Следствие. Функтор $f^{!}$ сопряжен справа к $Rf_{!}$.

5.13. Комментарии к теореме и план доказательства. Для пучка $\mathcal{F}$ на X и открытого множества $U \subset X$ обозначим через $\mathcal{F}_U$ продолжение $\mathcal{F}$ нулем вне U (в терминах функторов $j_{!}$, j', где $j: U \to X$ — вложение, имеем $\mathcal{F}_U = j^{\cdot} j_{!}\mathcal{F}$). Если $V \subset U$ — два открытых множества, то у нас есть естественный морфизм пучков $\mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$, индуцирующий для каждого пучка $\mathcal{G}$ на Y гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}(f_{!}\mathcal{F}_U, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}(f_{!}\mathcal{F}_V, \mathcal{G}). \qquad (4)$$

Ясно, что

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(f_{!}\mathcal{F}_U, \mathcal{G}) \qquad (5)$$

вместе с отображениями ограничения (4) является предпучком абелевых групп на X. Если бы этот предпучок был пучком, то все было бы в порядке: обозначая пучок $Y \mapsto \mathrm{Hom}(f_{!}\mathbf{Z}_U, \mathcal{G})$ (где $\mathbf{Z}$ — постоянный пучок на X) через $f^{?}\mathcal{G}$, мы бы имели

$$\mathrm{Hom}(f_{!}\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f^{?}\mathcal{G})$$

и уже $f_{!}$ обладал бы правым сопряженным. Оказывается, однако, что предпучок (5) является пучком лишь в весьма специальных случаях; более точно,

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(f_{!}(\mathcal{F}_U \otimes \mathcal{L}), \mathcal{G})$$

является пучком, если $\mathcal{L}$ — мягкий плоский пучок на X и в этом случае имеем функториально по $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{S}\mathcal{A}b_X$

$$\mathrm{Hom}(f_{!}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}), \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f^{!}(\mathcal{L}, \mathcal{G}))$$

для некоторого пучка $f^{!}(\mathcal{L}, \mathcal{G})$ на X.

Поэтому нужно перейти к производной категории и построить резольвенту $\mathcal{L}^{\cdot}$ постоянного пучка $\mathbf{Z}$ на X

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \ldots \to \mathcal{L}^n \to 0$$

и определить $f^{!}(\mathcal{G}^{\cdot})$ как диагональный комплекс, ассоциированный с бикомплексом

$$A^{ij} = f^{!}(\mathcal{L}^{-i}, \mathcal{J}^j),$$

где $\mathcal{G}^{\cdot} \to \mathcal{J}^{\cdot}$ — квазиизоморфизм $\mathcal{G}^{\cdot}$ с комплексом, состоящим из инъективных пучков на Y.

5.14. Представимые функторы в категории пучков. Важным шагом в доказательстве теоремы п. 5.13.1 является следующая теорема (часто применяемая в ситуациях, когда нужно построить пучок, обладающий определенными свойствами).

5.14.1. Теорема. Функтор $F:\mathcal{SAb}_X\to(\mathcal{Ab})^0$ представим в том и только том случае, если он переводит индуктивные пределы в $\mathcal{SAb}_X$ в проективные пределы в $\mathcal{Ab}$.

Доказательство. Часть «только в том» теоремы справедлива в общем случае: функтор $X\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ для произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$, $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, переводит индуктивные пределы в $\mathcal{A}$ в проективные пределы в $\mathcal{Ab}$. Для доказательства части «в том» заметим, что соответствие

$$U\mapsto F(\mathbf{Z}_U)$$

вместе с отображениями ограничения $F(\mathbf{Z}_U)\to F(\mathbf{Z}_V)$ для $V\subset U$, индуцированными вложениями $\varphi_{VU}:\mathbf{Z}_V\to\mathbf{Z}_U$, задает предпучок $\mathcal{G}$ абелевых групп на $X:\Gamma(U, \mathcal{G})=F(\mathrm{Z}_U)$. После этого из перестановочности F с пределами выводится, что $\mathcal{G}$ — пучок.

5.15. Свойства $f^!$. а) Прежде всего, конструкцию $f^!$ и теорему п. 5.14.1 можно обобщить, заменив категорию $\mathcal{SAb}$ на категории пучков R-модулей, где R — фиксированное нетерово кольцо, в частности, поле.

б) Для непрерывных отображений $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ имеем $(gf)^!=f^!\circ g^!$.

в) Если $f:X\to Y$ — вложение открытого или замкнутого подмножества, то функтор, сопряженный справа к $f_!$, существует на уровне самой категории пучков (без перехода к произвольной категории). А именно, если $f:U\to Y$ — вложение открытого подмножества, то сопряженным справа к $f_!:\mathcal{SAb}_U\to\mathcal{SAb}_Y$ будет $f^*:\mathcal{SAb}_Y\to\mathcal{SAb}_U$.

Если $f:X\to Y$ — вложение замкнутого подмножества, то сопряженным справа к $f_!=f_*:\mathcal{SAb}_X\to\mathcal{SAb}_Y$ будет функтор Γ_X (см. п. 5.5). Рассмотрим теперь ситуацию, противоположную в), когда $f:X\to pt$ — отображение в точку.

5.16. Дуализирующий комплекс. Двойственность. Будем считать, что $Y=pt$ — точка. Тогда пучки на Y — это просто абелевы группы, и мы будем обозначать через $\mathbf{Z}\in\mathrm{Ob}D^+(\mathcal{SAb}_Y)=\mathrm{Ob}D^+(\mathcal{Ab})$ 0-комплекс с нулевой компонентой $\mathbf{Z}$. Для любого топологического пространства X (конечномерного, локально компактного) положим $\mathbf{D}_X^{\cdot}=f^!(\mathbf{Z})$, где $f:X\to pt$. Комплекс $\mathbf{D}_X^{\cdot}$ называется *дуализирующим комплексом* на X. Теорема п. 5.12.1 превращается при этом в следующее утверждение

$$R\,\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X, \mathcal{F}^{\cdot}), \mathbf{Z})\simeq R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\cdot}, \mathbf{D}_X^{\cdot}). \qquad (6)$$

Существует более явная конструкция дуализирующего комплекса $\mathbf{D}_X$. Для каждого $U\subset X$ обозначим через $K_.(U)$ комплекс относительных целочисленных цепей $K_.(U)=C_.(X, X\setminus U; \mathbf{Z})$. Ясно, что при $U\subset V$ вложение цепей определяет морфизм комплексов $K_.(V)\to K_.(U)$ и $U\mapsto K_.(U)$ есть комплекс предпучков на X. Теперь дуализирующий комплекс D_X совпадает с комплексом пучков, ассоциированным с комплексом предпучков $K_\cdot$. Другая формулировка этого утверждения такова. Обозначая через $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ пучок морфизмов пучка $\mathcal{F}$ в пучок $\mathcal{G}$ и через $R\mathcal{H}om$ — соответствующий производный функтор, определим функтор двойственности

$$\mathfrak{D}_X : D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)^0 \to D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$$

формулой

$$\mathfrak{D}_X(\mathcal{F}^\cdot) = R\,\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\cdot, \mathrm{D}_X^\cdot).$$

Комплекс $\mathfrak{D}_X\mathcal{F}^\cdot$ называется *двойственным по Вердье* к $\mathcal{F}^\cdot$.

Далее, для любых двух пучков $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на X имеется естественный морфизм

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \mathcal{G}).$$

Несложная проверка показывает, что этот морфизм продолжается на производные категории. В частности, имеем морфизм функторов $\alpha : \mathrm{Id} \to \mathfrak{D}_X\mathfrak{D}_X$ из $D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$ в себя.

На всей категории $D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$ морфизм α, вообще говоря, не является изоморфизмом, так что $\mathfrak{D}_X$ не является антиэквивалентностью. Однако α является изоморфизмом на важной полной подкатегории, состоящей из комплексов с конструктивными когомологиями. А именно, если X — стратифицированное пространство, страты которого — неособые топологические многообразия, то когомологии $\mathfrak{D}_X^\cdot$ являются конструктивными относительно этой стратификации, функтор $\mathfrak{D}_X$ сохраняет подкатегорию $\mathrm{Const}_X \subset D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$, состоящую из комплексов с конструктивными когомологиями, и на этой подкатегории α — изоморфизм (подробнее об этом см. гл. 7).

В случае, когда $R = k$ — поле, функтор двойственности $\mathfrak{D}_X$ можно описать еще следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок. Определим предпучок $\mathcal{F}^{*\mathrm{naive}}$, полагая

$$\mathcal{F}^{*\mathrm{naive}}(U) = \Gamma_c(U, \mathcal{F})^*.$$

Этот предпучок всегда является вялым (любое сечение над открытым множеством продолжается до сечения над всем X) и является пучком, если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок. Рассмотрим функтор $\mathcal{S}h_k \to (\mathcal{S}h_k)^0$ ($\mathfrak{Sh}_k$ — категория пучков k-модулей), сопоставляющий пучку $\mathcal{F}$ пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F}^{*\mathrm{naive}}$. Этот функтор точен слева и его правый производный функтор совпадает с $\mathfrak{D}_X$. Говоря несколько по-другому, $\mathfrak{D}_X(\mathcal{F}) = (S^\cdot)^{*\mathrm{naive}}$, где $S^\cdot \to \mathcal{F} \to 0$ — мягкая резольвента $\mathcal{F}$.

Особенно простой оказывается структура дуализирующего комплекса, когда X неособо.

5.16.1. Следствие. Пусть X—n-мерное топологическое многообразие с границей. Тогда $\mathfrak{D}_X^\cdot = \omega_X[n]$, где $\omega_X^\cdot$ — пучок, задаваемый равенством

$$\Gamma(U, \omega_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(H^n_c(U, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$$

для любого открытого $U \subset X$.

5.17. Замечания. Заменяя $\mathbf{Z}$ на произвольное нётерово кольцо R, можно получить аналоги доказанного следствия. В частности, если $R = k$ — поле, а X — топологическое многообразие без края, то $\omega_X = \tau_X$ — пучок k-ориентаций X (постоянный пучок со слоем k, если X ориентируемо или если $\mathrm{char}\, k = 2$). Если X — многообразие с краем ∂X, то $\omega_X = i_! \tau$, где τ — пучок k-ориентаций $X - \partial X$, а $i : X - \partial X \to X$ — вложение.

Беря когомологии обеих частей (6), можно выразить двойственность Пуанкаре—Вердье в более привычном виде (k — поле) как существование для любого пучка $\mathcal{F}$ на X канонического изоморфизма

$$\mathrm{Hom}_k(H^i_c(X, \mathcal{F}), k) \tilde{\to} \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \omega_X). \tag{7}$$

Обозначая через $\int_X : H^n_c(X, \omega_X) \to k$ фундаментальный класс, то есть прообраз $1 \in \mathrm{Hom}(\omega_X, \omega_X)$ при изоморфизме (7) с $i = n = \dim X$, $\mathcal{F} = \omega_X$, мы можем записать (7) как композицию канонического спаривания

$$\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^i_c(X, \mathcal{F}) \to H^n_c(X, \omega_X)$$

и $\int_X$.

5.18. **Связь функторов в $D(\mathcal{S}\mathcal{A}b)$.** Здесь мы приведем результаты о связи различных функторов в производных категориях пучков абелевых групп на топологических пространствах. Ниже все пространства предполагаются локально компактными, паракомпактными и имеющими конечную размерность, а их отображения — непрерывными. Равенства объектов (производной) категории означают функториальные изоморфизмы.

а) $f^{\cdot}$ *и* $\overset{L}{\otimes}$. Для $f : X \to Y$, $\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot} \in D^-(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$ имеем

$$f^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}^{\cdot}) = f^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot} \overset{L}{\otimes} f^{\cdot}\mathcal{G}^{\cdot}.$$

Для доказательства нужно заменить $\mathcal{F}^{\cdot}$ и $\mathcal{G}^{\cdot}$ на их плоские резольвенты (квазиизоморфные комплексы, состоящие из плоских пучков) и использовать равенство $f^{\cdot}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = f^{\cdot}\mathcal{F} \otimes f^{\cdot}\mathcal{G}$ для $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y$, вытекающее из $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_y = \mathcal{F}_y \otimes \mathcal{G}_y$.

б) $R\mathcal{H}om$ *и* $\overset{L}{\otimes}$. Для $\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot} \in D^-(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$, $\mathcal{H}^{\cdot} \in D^+(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$ имеем

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\cdot} \otimes \mathcal{G}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\cdot}, R\mathcal{H}om(\mathcal{G}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\cdot})).$$

Для доказательства нужно проверить соответствующее утверждение для пучков абелевых групп на X, после чего заменить $\mathcal{G}^{\cdot}$ на плоскую резольвенту, а $\mathcal{H}^{\cdot}$ — на инъективную резольвенту.

в) $Rf.$ *и* $R\mathcal{H}om$. Для $\mathcal{F}^{\cdot}\in D^{-}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$, $\mathcal{G}^{\cdot}\in D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$ имеем

$$Rf.R\mathcal{H}om(f^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\cdot}, Rf.\mathcal{G}^{\cdot}).$$

Заменяя $\mathcal{G}^{\cdot}$ на инъективную резольвенту, получаем, что $f.\mathcal{G}$ (почленное применение) состоит из инъективных пучков, а $\mathcal{H}om(f^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot})$ — из мягких пучков. После этого нужный изоморфизм есть следствие изоморфизма в $\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y$:

$$f.\mathcal{H}om(f^{\cdot}\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, f.\mathcal{G}),$$

вытекающего из сопряженности $f^{\cdot}$ и $f.$.

г) *Формулы замены базы.* Пусть задан декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

пространств и непрерывных отображений, так что X' — расслоенное произведение X и Y' над X. Тогда в $D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_{Y'})$ имеем

$$q^{\cdot}Rf_!\mathcal{F}^{\cdot} = Rg_!p^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot},$$

$$Rg.p^!\mathcal{G}^{\cdot} = q^!Rf_!\mathcal{G}^{\cdot}, \quad \mathcal{F}^{\cdot}\in D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X).$$

Для доказательства первого утверждения следует проверить равенство $q^{\cdot}f_!\mathcal{F} = g_!p^{\cdot}\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\in\mathcal{S}\mathcal{A}b_X$, вычисляя ростки левой и правой частей в точке $y'\in Y'$ с помощью предложения п. 5.9.1, после чего нужно заменить $\mathcal{F}^{\cdot}$ на мягкую резольвенту. Для доказательства второго утверждения следует поменять местами X и Y', применить первое утверждение и использовать сопряженность $f^{\cdot}$ и $Rf.$, $g^{\cdot}$ и $Rg.$, $Rq_!$ и $q^!$, $Rp_!$ и $p^!$.

д) *Формула проекции.* Для $\mathcal{F}^{\cdot}\in D^{-}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$, $\mathcal{G}^{\cdot}\in D^{-}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$ имеем

$$Rf_!(\mathcal{F}^{\cdot}\overset{L}{\otimes}f^{\cdot}\mathcal{G}^{\cdot}) = Rf_!\mathcal{F}^{\cdot}\overset{L}{\otimes}\mathcal{G}^{\cdot}.$$

Для доказательства следует проверить аналогичную формулу в $\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y$, после чего заменить $\mathcal{F}^{\cdot}$ на мягкую резольвенту, а $\mathcal{G}^{\cdot}$ — на инъективную.

е) $f^!$ *и* $R\mathcal{H}om$. Для $\mathcal{F}^{\cdot}$, $\mathcal{G}^{\cdot}\in D^{+}(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y)$ имеем

$$f^!R\mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om(f^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}, f^!\mathcal{G}^{\cdot}).$$

Для доказательства следует заменить $\mathcal{F}^{\cdot}$ на мягкую резольвенту, $\mathcal{G}^{\cdot}$ — на инъективную и использовать явную конструкцию $f^!$.

ж) *Функторы и двойственность.* Прежде всего, имеем

$$f^!\mathbf{D}_Y^{\cdot} = \mathbf{D}_X^{\cdot}.$$

Далее,

$$f^!\mathfrak{D}_Y\mathcal{F}^{\cdot}=\mathfrak{D}_X f^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}, \quad \mathcal{F}^{\cdot}\in D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X),$$

$$\mathfrak{D}_Y Rf_!\mathcal{G}^{\cdot}=Rf_*\mathfrak{D}_X\mathcal{G}^{\cdot}, \quad \mathcal{G}^{\cdot}\in D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Материал первых четырех параграфов этой главы составляет теория производных категорий и соответствующее изложение теории производных функторов. Первоисточниками здесь являются записки семинара Хартсхорна [85] и автореферат Вердье [141]; см. также [8], [84], [91]. Полные доказательства можно найти в [8], [85]. Условия локализации в п. 1.7 — это классические условия Оре, возникающие при исследовании тела отношений некоммутативных колец (см. [86]). Основная лемма п. 2.2.1 взята из книги Бурбаки [32]. Результаты из п. 3.1.2 (и их далекие обобщения) см. в [84]. Результаты п. 4.12 принадлежат Делиню (приложение к [43]), результаты п. 4.13 — Руусу [124]. Спектральная последовательность Гротендика из п. 4.15 показывает схему возникновения многих спектральных последовательностей в алгебре, топологии и алгебраической геометрии, см. [77].

Когомологии пучков, изложенные в § 5, можно найти во многих книгах; упомянем [10], [33], [68], [91]. Доказательство предложения в п. 5.1 см. в [68], теоремы п. 5.3 — в [69] и [8]. Результаты пп. 5.8—5.11 см. в [91] и в статьях Бореля [29] и Гривеля [75]. Теоремы п. 5.13.1 и п. 5.14.1 принадлежат Вердье [140]; доказательства см. в [8] и в [91]. Результаты, приведенные в п. 5.18, собраны в компактном виде в статье Бореля в [29].

Глава 5

ТРИАНГУЛИРОВАННЫЕ КАТЕГОРИИ

§ 1. Основные понятия

1.1. Аксиомы. Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая аддитивная категория. Структура *триангулированной категории* на $\mathcal{D}$ определяется заданием следующих данных а), б), подчиненных аксиомам TR1—TR4.

а) Аддитивный автоморфизм $T:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$, называемый *функтором сдвига*.

Будем писать, как в гл. 4, 2.2, $X[n]$ вместо $T^n(X)$ и $f[n]$ вместо $T^n(f)$ (для морфизма $f:X\to Y$). Мы можем теперь буквально повторить части а) и б) определения гл. 4, п. 2.3, введя в D *треугольники*

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$$

и их *морфизмы*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]. \end{tikzcd}$$

Последняя часть определения гл. 4, п. 2.3 вводится аксиоматически: среди треугольников в $\mathscr{D}$ должен быть задан

б) Класс выделенных треугольников.

Следующие аксиомы, как мы постепенно убедимся, удовлетворительно описывают рабочие свойства конструкции гл. 4, п. 2.3в).

TR1. а) $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to X[1]$ выделен.

б) Если треугольник выделен, то любой изоморфный ему треугольник выделен.

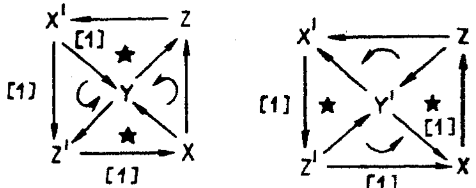
в) Любой морфизм $X \xrightarrow{u} Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TR2. Треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен, если и только если $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ выделен.

TR3. Пусть даны два выделенных треугольника и два морфизма между их началами, образующие коммутативный квадрат. Эта диаграмма дополняется (не обязательно однозначно) до морфизма треугольников:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

Последняя аксиома относится к довольно большой «диаграмме октаэдра». Один из способов ее изображать состоит в задании двух «шапочек» октаэдра с общими «полями»



(верхняя шапочка) (нижняя шапочка)

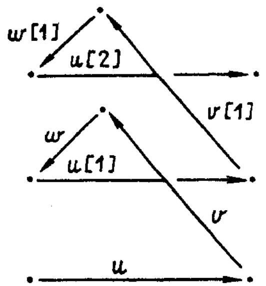
В этих диаграммах X, Y и т. д. — объекты $\mathscr{D}$; стрелки вида $X' \to Z'$ означают морфизм $X' \to Z'[1]$; треугольники, отмеченные ★, выделены, а треугольники, отмеченные ↷, коммутативны. Наконец, требуется, чтобы два возможных морфизма $Y \to Y'$ через Z и Z' совпадали, и два возможных морфизма $Y' \to Y[1]$ через $X[1]$ и X' совпадали.

Закончив описание диаграммы октаэдра, мы можем сформулировать последнюю аксиому.

TR4. Любая диаграмма типа «верхняя шапочка» дополняема до диаграммы октаэдра.

1.2. Замечания о формальной структуре аксиом.

а) Из аксиомы TR2 следует, что каждый выделенный треугольник канонически вкладывается в «спираль», где любой виток из трех следующих подряд морфизмов выделен:



Соответственно, морфизм треугольников порождает две спирали, сцепленные горизонтальными стрелками. Из TR3 и TR2 следует, что если задать две соседние стрелки, образующие коммутативный квадрат, то их можно дополнить до морфизма спиралей.

б) Диаграмму «верхняя шапочка» можно рассматривать как морфизм выделенных треугольников, у которого средний морфизм тождественный. Вложив этот морфизм в двойную спираль, как выше, и посмотрев на ее последовательные витки, можно убедиться, что в них будут встречаться диаграммы типа «нижняя шапочка» и TR4 можно сформулировать в эквивалентном виде (по модулю TR1—3) : TR4$'$: дополняемость до октаэдра нижних шапочек.

в) В аксиоме TR1 в) любые два дополнения $X \xrightarrow{u} Y$ до выделенного треугольника изоморфны: морфизм h, существование которого постулировано в TR3 для $f = \mathrm{id}_X$, $g = \mathrm{id}_Y$, является изоморфизмом.

Поэтому «верхнюю шапочку» можно с точностью до изоморфизма восстановить по одной ее коммутативной грани $X \to Y \to Z$, достроив $X \to Y$ и $Y \to Z$ до отмеченных треугольников.

Из аксиом TR1—TR3 можно вывести следующее свойство выделенных треугольников (ср. гл. 4, п. 2.5).

1.3. Предложение. Пусть $\mathscr{D}$ — триангулированная категория, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ — выделенный треугольник. Тогда для любого объекта U диаграммы

$$\ldots \to \mathrm{Hom}(U, X[i]) \xrightarrow{u_*[i]} \mathrm{Hom}(U, Y[i]) \xrightarrow{v_*[i]} \mathrm{Hom}(U, Z[i]) \xrightarrow{w_*[i]}$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(U, X[i+1]) \to \ldots,$$

$$\ldots \to \operatorname{Hom}(X[i+1], U) \xrightarrow{w^*[i]} \operatorname{Hom}(Z[i], U) \xrightarrow{v^*[i]}$$
$$\xrightarrow{v^*[i]} \operatorname{Hom}(Y[i], U) \xrightarrow{u^*[i]} \operatorname{Hom}(X[i], U) \to \ldots$$

являются точными последовательностями.

Доказательство. Для иллюстрации методов работы с триангулированными категориями докажем точность первой последовательности. В силу замечания 2а), достаточно доказать точность в члене $\operatorname{Hom}(U, Y)$. Прежде всего проверим, что $vu=0$ (и значит, композиция любых последовательных стрелок в выделенном треугольнике нулевая). Это следует из TR3, примененной к $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to X[1]$ и нашему треугольнику:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Единственный возможный морфизм h — нулевой, а из коммутативности следует, что $vu=0$.

Пусть теперь $f: U \to Y$ — такой морфизм, что $vf=0$. Мы хотим доказать, что $f=ug$, где $g: U \to X$. Возьмем g из морфизма выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "g"] & U \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & U[1] \arrow[d, dashed, "g[1]"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1].
\end{tikzcd}$$

Этот морфизм достраивается с помощью применения TR2 и TR3: сначала TR3 применяется к

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & U[1] \arrow[r, "-\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "g[1]"] & U[1] \arrow[d, dashed, "f[1]"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

и затем по $g[1]$ восстанавливается g.

1.4. Следствие. а) Если в диаграмме TR3 f и g изоморфизмы, то и h изоморфизм.

б) В аксиоме TR1 в) дополняющий треугольник определен однозначно с точностью до изоморфизма.

1.5. Следствие. Если $v'gu=0$, то g вкладывается в морфизм треугольников. Если к тому же $\operatorname{Hom}(X, Z^1[-1])=0$, то этот морфизм определен однозначно.

1.6. Когомологические функторы. Функтор $H: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ из триангулированной категории $\mathcal{D}$ в абелеву категорию $\mathcal{A}$ называется *когомологическим*, если для любого выделенного треугольника

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

$\mathcal{D}$ последовательность

$$H(X)\xrightarrow{H(u)}H(Y)\xrightarrow{H(v)}H(Z)$$

точна в $\mathcal{A}$ (ср. гл. 4, п. 4.11 а).

Из аксиомы TR2 вытекает, что если H — когомологический функтор, то каждый выделенный треугольник в $\mathcal{D}$ приводит к длинной точной последовательности в $\mathcal{A}$:

$$\ldots \to H(X[i])\xrightarrow{H(u[i])}H(Y[i])\xrightarrow{H(v[i])}H(Z[i])\xrightarrow{H(w[i])}H(x[i+1])\to \ldots$$

Основным примером когомологического функтора является функтор взятия 0-когомологий комплекса, $C^{\cdot}\to H^0(C^{\cdot})$, рассматриваемый как функтор из $K(\mathcal{A})$ или $D(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$.

Другим примером когомологического функтора является функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,\ \cdot):\mathcal{D}\to\mathcal{A}b$, для каждого фиксированного $U\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$.

1.7. Конус морфизма. Согласно аксиомам, каждый морфизм $u:X\to Y$ в триангулированной категории определяет с точностью до изоморфизма объект $C(u)$ — третью вершину выделенного треугольника $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{u}Z=C(u)\to X[1]$. Он называется *конусом морфизма* u (по английски — a cone, по французски — un cône; неопределенный артикль подчеркивает неоднозначность выбора). Конус задан вместе со стрелками $Y\to C(u)\to X[1]$.

Причина такого наименования объясняется следующим замечанием.

Одними из основных примеров триангулированных категорий являются категории $K(\mathcal{A})$ и $D(\mathcal{A})$ для различных абелевых категорий $\mathcal{A}$. Из предложения гл. 4, п. 2.4 несложно вывести, что для любого выделенного треугольника $X^{\cdot}\xrightarrow{u}Y^{\cdot}\to Z^{\cdot}\to X^{\cdot}[1]$ в этих категориях комплекс $Z^{\cdot}$ изоморфен (хотя и неканонически) конусу морфизма u.

Вернемся к общим триангулированным категориям. Если бы мы пожелали сделать C функтором, то мы могли бы: а) определить на объектах $C:\mathrm{Ob}(\mathrm{Mor}\,\mathcal{D})\to\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ с помощью аксиомы выбора (здесь $\mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ — категория морфизмов категории $\mathcal{D}$); б) определить на морфизмах $C:\mathrm{Mod}(\mathrm{Mor}\,\mathcal{D})\to\mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ с помощью TR3 и аксиомы выбора; после чего мы бы столкнулись с тем, что равенство $C(u\circ v)=C(u)\circ C(v)$ ниоткуда не следует. Эта «нефункториальность конуса» является первым симптомом некоторого неблагополучия в аксиомате триангулированных категорий. К сожалению, удовлетворительного изменения этой аксиоматики пока нет. Один из возможных способов постараться исправить положение дел в этой и подобных ситуациях состоит в том, что при попытке канонически провести некоторую конструкцию (например, конус) следует ввести другую триангулированную категорию, объекты которой суть «гомотопические классы конструкций» в исходной категории, и сопоставить каждому объекту новой категории объект исходной категории. Эту схему можно, например, реализовать в случае, когда исходная категория обладает структурой фильтрованной производной категории (см. [25]).

Теперь можно поставить следующий вопрос. В разных ситуациях возникают категории $\mathscr{B}$, снабженные конструкцией «абстрактного конуса» $C : \mathrm{Mor}\,\mathscr{B} \to \mathscr{B}$. Нет ли полезной общей аксиоматики таких отображений? Аксиомы должны затрагивать по меньшей стороне две структуры: а) функториальные свойства C по отношению к морфизмам в $\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$; б) поведение C при композиции морфизмов (относительно морфизмов в категории $\mathrm{Mor}\,\mathscr{B}$). Частичный ответ на этот вопрос дает аксиома октаэдра. А именно, пусть $X \xrightarrow{u} Y$, $Y \xrightarrow{v} Z$ — два морфизма в триангулированной категории $\mathscr{D}$. Достроим их до треугольников с третьими вершинами $C(u)$, $C(v)$. Определен морфизм $w : C(v) \to C(u)[1]$ — композиция морфизмов $C(v) \to Y[1]$ (из второго треугольника) и $Y[1] \to C(u)[1]$ (из первого треугольника). Часть содержания аксиомы октаэдра можно выразить следующей формулой:

$$C(v \circ u) = C\left(C(v) \xrightarrow{w} C(u)[1]\right)[-1].$$

В самом деле, рассмотрим верхнюю шапочку октаэдра, достроенную по коммутативному треугольнику

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "v"] & & Z \\ & X \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "vu"'] & \end{tikzcd}.$$

В обозначениях п. 1.1 имеем:

$$Z' = C(u),\ X' = C(v),$$
$$Y' = C(v \circ u)$$

(правый треугольник нижней шапочки). С другой стороны, из левого треугольника нижней шапочки следует, что $Y' = C(w)[-1]$.

Оставшаяся часть содержания аксиомы октаэдра касается описания входящей в $C(v \circ u)$ и выходящей из $C(v \circ u)$ стрелок.

1.8. Триангулированность $K(\mathscr{A})$. Как уже отмечалось, основными примерами триангулированных категорий являются категории $K(\mathscr{A})$ и $D(\mathscr{A})$. Доказательство следующей теоремы проводится путем непосредственной проверки аксиом.

1.8.1. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория. Тогда категория $K(\mathscr{A})$ со стандартным функтором сдвига и выделенными треугольниками, описанными в гл. 4, п. 2.3, является триангулированной категорией.

То же верно для категорий $K^{\pm}(\mathscr{A})$ и $K^b(\mathscr{A})$.

1.9. Локализующие классы морфизмов в триангулированных категориях. Для доказательства триангулированности категории $D(\mathscr{A})$ нужно установить совместимость структуры триангулированной категории в $K(\mathscr{A})$ с локализацией по квазиизоморфизмам.

Вообще, структуру триангулированной категории можно индуцировать на локализованной категории, если класс морфизмов S удовлетворяет следующим свойствам *совместимости с триангуляцией*:

а) $s \in S \Leftrightarrow T(s) \in S$.

б) Рассмотрим диаграмму TR3 (п. 1.1). Если в этой диаграмме $f, g \in S$, то существует дополняющий морфизм $h \in S$.

1.9.1. Теорема. Пусть $\mathscr{D}$ — триангулированная категория, S — локализующий класс морфизмов, совместимый с триангуляцией. Введем на D_S функтор сдвига T_S тавтологически ($\mathrm{Ob}\,\mathscr{D}_S = \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, $T_S = T$ на объектах). Назовем треугольник в D_S *выделенным*, если он изоморфен образу выделенного треугольника относительно функтора локализации $\mathscr{D} \to \mathscr{D}_S$.

Тогда $\mathscr{D}_S$ с этими структурами будет триангулированной категорией.

Доказательство состоит в определении T_S на морфизмах (домиках) равенством

$$T\left[\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}\right] = \begin{tikzcd} & T(Z) \arrow[dl, "T(s)"'] \arrow[dr, "T(u)"] & \\ T(X) & & T(Y) \end{tikzcd}$$

и проверке аксиом.

Следствие. Производные категории $D^*(\mathscr{A})$ триангулированы.

1.10. Толстые подкатегории. Существует эквивалентный способ определить локализацию в триангулированной категории, при котором задается семейство объектов, которые после локализации становятся изоморфными нулевому объекту (а не класс морфизмов, которые становятся изоморфизмами).

1.10.1. Определение. Полная триангулированная подкатегория $\mathscr{C}$ триангулированной категории $\mathscr{D}$ называется *толстой* (по-английски thick, по-французски epaisse), если выполнено следующее условие:

(Т) Пусть морфизм $f: X \to Y$ в $\mathscr{D}$ факторизуется через объект из $\mathscr{C}$ (то есть представляется в виде $X \to V \to Y$ с $V \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$) и содержится в выделенном треугольнике $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ с $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Тогда $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Стандартный пример толстой подкатегории — категория всех ацикличных объектов в $K(\mathscr{A})$. В самом деле, первое условие в (Т) выше означает, что $H^\cdot(f)$ — нулевой морфизм, а второе условие означает, что $H(f)$ — изоморфизм, откуда вытекает, что X и Y ацикличны.

Связь между толстыми подкатегориями в $\mathcal{D}$ и ацикличными классами морфизмов такова. Назовем локализующий класс S в $\mathcal{D}$ *насыщенным*, если $s \in S$ в том и только в том случае, если существуют морфизмы f, $f^{\cdot}$ в $\mathcal{D}$, для которых $f \circ s \in S$ и $s \circ f^{\cdot} \in S$.

1.10.2. Теорема. Пусть $\mathcal{D}$ — триангулированная категория. Отображение

$$\mathcal{C} \mapsto \varphi(\mathcal{C}) = \left\{ \begin{array}{l} s \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}, \ s \text{ содержится в выделенном} \\ \text{треугольнике } X \xrightarrow{s} Y \to Z \to X[1] \\ \text{с } s \in S. \end{array} \right\}$$

задает взаимно однозначное соответствие между множеством толстых подкатегорий в $\mathcal{D}$ и множеством насыщенных локализующих классов морфизмов в $\mathcal{D}$, совместимых с триангуляцией.

Обратное соответствие сопоставляет классу $S \subset \operatorname{Mor} \mathcal{D}$ полную подкатегорию $\psi(S)$, порожденную объектами $Z \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$, содержащимися в выделенном треугольнике $X \to Y \xrightarrow{f} Z \to X[1]$ с $s \in S$.

Будем называть *точной тройкой триангулированных категорий* тройку $\mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{D} \xrightarrow{Q} \mathcal{E}$, где $\mathcal{C}$ — толстая подкатегория триангулированной категории $\mathcal{D}$, $\mathcal{E} = \mathcal{D}[\varphi(\mathcal{C})^{-1}]$ — локализация D по классу $S = \varphi(\mathcal{C})$, $P: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $Q: D \to \mathcal{E}$ — функторы вложения и локализации соответственно.

1.11. Выделенные треугольники, конус и октаэдр в $D(\mathcal{A})$. Выделенные треугольники в $D(\mathcal{A})$ описыватся следующим предложением (показывающим, что они аналогичны точным тройкам в абелевых категориях).

1.11.1. Предложение. Любая точная тройка комплексов в $K(\mathcal{A})$: $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ дополняется до выделенного треугольника в $D(\mathcal{A})$ подходящим морфизмом $Z \to X[1]$ и любой выделенный треугольник в $D(\mathcal{A})$ изоморфен такому. ■

Предложение п. 1.11.1 позволяет дать следующую интерпреацию конуса и аксиомы октаэдра в $D(\mathcal{A})$.

Если морфизм $X \xrightarrow{u} Y$ в $D(\mathcal{A})$ представлен вложением комплексов, то конус представлен факторкомплексом $Y/u(X)$, а соответствующее отображение $Y \to C(u)$ есть факторизация.

Рассмотрим теперь диаграмму октаэдра, в которой морфизмы $X \to Y$ и $Y \to Z$ (а, значит, и $X \to Z$) представлены вложениями комплексов. Мы утверждаем тогда, что суть аксиомы октаэдра состоит в существовании естественного изоморфизма

$$Z/Y \xrightarrow{\sim} (Z/X)/(Y/X).$$

В самом деле, $X' = Z/Y$, $Z' = Y/X$. Далее, из нижней шапочки, $Y' = Z/X$ и морфизм $Z' \to Y'$ представлен естественным вложением $Y/X \to Z/X$. Наконец, третья вершина X' левого треугольника в нижней шапочке представлена фактором $Y'/Z' = (Z/X)/(Y/X)$, а она же в верхней шапочке есть Z/Y.

§ 2. Примеры

2.1. Грассманова алгебра. Пусть k — поле характеристики $\neq 2$, E — линейное пространство над k размерности $n+1$. Рассмотрим $\mathbf{Z}$ — градуированную внешнюю алгебру:

$$\Lambda = \Lambda(E) = \bigoplus_{i=0}^{n+1} \Lambda^i(E).$$

Обозначим через $\mathcal{M}(\Lambda)$ категорию левых унитарных $\mathbf{Z}$-градуированных Λ-модулей, морфизмы в которой — гомоморфизмы нулевой степени. Пусть $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ — полная подкатегория $\mathcal{M}(\Lambda)$, состоящая из конечно порожденных $\mathbf{Z}$-модулей (это условие равносильно конечномерности над k).

2.2. Операции над Λ-модулями. а) Пусть V — некоторый Λ-модуль. Положим для $m \in \mathbf{Z}$

$$V(m)^i = V^{i-m}, \quad V(m) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} V(m)^i.$$

Сохраним умножение на Λ прежним. Очевидно, операция сдвига градуировки $V \mapsto V(m)$ продолжается до функтора тождественным отображением на морфизмах $f \mapsto f(m) = f$.

б) Для двух Λ-модулей V, V' положим

$$V \otimes V' = \bigoplus_l (V \otimes V')^l, \quad (V \otimes V')^l = \bigoplus_{i+j=l} (V^i \otimes_k V'^j),$$

$$e(v \otimes v') = ev \otimes v' + (-1)^{\deg v} v \otimes ev', \quad v \in V, \quad v' \in V', \quad e \in E.$$

Таким образом, тензорное произведение мы всегда в этом параграфе строим *над k, а не над* Λ.

в) На любом левом Λ-модуле V имеется каноническая структура правого Λ-модуля V_r с умножением

$$v\lambda = (-1)^{\deg v \cdot \deg \lambda} \lambda v, \quad v \in V, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Отображение $V \mapsto V_r$ очевидным образом продолжается до функтора, устанавливающего изоморфизм между категориями левых и правых (градуированных) модулей.

г) Положим $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ и снабдим V^* умножением на Λ по формуле $(\lambda\varphi)(v) = (-1)^{\deg v \cdot \deg \lambda} \varphi(\lambda v)$. Вместе с градуировкой $(V^*)^i = \mathrm{Hom}_k(V^{-i}, k)$ это определяет на V^* структуру Λ-модуля.

2.3. Категория $\mathcal{M}^b(\Lambda)/\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^b(\Lambda)$ полную подкатегорию свободных градуированных Λ-модулей. Назовем морфизм $f: V \to V'$ в $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ *эквивалентным нулю,* если он разлагается в композицию $V \to F \to V'$, где $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$. Очевидно, эквивалентные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал I в $\mathrm{Mor}\mathscr{M}^b(\Lambda)$. Положим

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{M}^b(\Lambda)/\mathscr{F}) = \mathrm{Ob}\mathscr{M}^b(\Lambda); \quad \mathrm{Mor}(\mathscr{M}^b(\Lambda)/\mathscr{F}) = \mathrm{Mor}\mathscr{M}^b(\Lambda)/I.$$

2.3.1. Теорема. На $\mathscr{M}^b(\Lambda)/\mathscr{F}$ имеется естественная структура триангулированной категории.

В этой структуре, которая будет описана ниже, наиболее необычно выглядит функтор сдвига T:

$$T(V) = (\Lambda(-n) \underset{k}{\otimes} V)/i(V)(-n), \quad n = \dim E - 1, \tag{1}$$

где $i(V) = \Lambda^{n+1}(E) \underset{k}{\otimes} V \subset \Lambda \otimes V$.

2.4. План доказательства теоремы. Любой Λ-модуль V определяет семейство комплексов линейных пространств, в котором дифференциалы пронумерованы элементами $e \in E$:

$$L_e(V): \ldots \to V^{j-1} \xrightarrow{d^{j-1}(e)} V^j \xrightarrow{d^j(e)} V^{j+1} \to \ldots,$$

где $d^j(e)v = ev$. Очевидно, $L_e(V)$ и $L_{ce}(V)$ для $c \in k$, $c \neq 0$, изоморфны, так что семейство $L_e(V)$ для $e \neq 0$, по существу, пронумеровано точками проективного пространства $\mathbf{P}(E)$ лучей в E. Оформляя это замечание алгебро-геометрически, назовем *жестким комплексом* комплекс квазикогерентных пучков на $\mathbf{P}(E)$, изоморфный

$$L: \ldots \to V^j \otimes \mathcal{O}(j) \to V^{j+1} \otimes \mathcal{O}(j+1) \to \ldots,$$

дифференциалы в котором — морфизмы $\mathcal{O}$-модулей. Назовем комплекс L *конечным*, если он ограничен и все V^j конечномерны.

Построим по жесткому комплексу L градуированный Λ-модуль $V(L)$:

$$V(L) = \underset{j}{\oplus} \Gamma(L^j(-j)) = \oplus V(L)^j.$$

Рассмотрим отображение

$$a: \Gamma(d^j(-j)): V(L)^j \to V(L)^{j+1} \otimes E^*,$$

где мы канонически отождествили $\Gamma(\mathcal{O}(1))$ и E^*. Для любого элемента $e \in E$ и для $v \in V(L)^j$ положим

$$ev = (-1)^j (\mathrm{id} \otimes s_e) a(v),$$

где $s_e: E^* \to k$ — свертка с e. Из равенства $d^{j+1} \circ d^j = 0$ следует, что $e^2 v = 0$, так что $V(L)$ превращается в градуированный Λ-модуль.

Нетрудно убедиться, что эта конструкция продолжается до функтора из категории жестких комплексов $\mathcal{R}ig$ в $\mathscr{M}(\Lambda)$. Этот функтор является эквивалентностью. Обратный функтор, по существу, уже описан: линейное по e семейство отображений $d^j(e): V^j \to V^{j+1}$ — это то же самое, что линейное отображение $V^j \to V^{j+1} \otimes E^*$, которое однозначно определяет морфизм пучков $V^j \otimes \mathcal{O} \to V^{j+1} \otimes \mathcal{O}(j+1)$ на $\mathbf{P}(E)$. Скручивая его с $\mathrm{id}_{\mathcal{O}(j)}$, получаем дифференциал $d^j : V^j \otimes \mathcal{O}(j) \to V^{j+1} \otimes \mathcal{O}(j+1)$.

Объекты $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ соответствуют при этом ограниченным комплексам с конечномерными компонентами.

Рассмотрим теперь композицию функторов

$$\Phi : \mathcal{M}^b(\Lambda) \mapsto \mathcal{R}ig^b \to \mathcal{D}^b,$$

где через $\mathcal{D}^b$ мы обозначили производную категорию ограниченных комплексов квазикогерентных пучков на $\mathbf{P}(E)$.

Теорема п. 2.3.1 вытекает из следующих фактов, доказательство которых, по существу, основано на свойствах пучков $\mathcal{O}(i)$ на $\mathbf{P}(E)$.

а) Существенный образ функтора Φ (то есть полная подкатегория $\mathcal{D}^b$, состоящая из всех объектов, изоморфных объектам вида $\Phi(V)$) замкнут относительно функтора сдвига T.

б) Имеется естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}^b(\Lambda)}(V, W) \bmod I \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b}(\Phi(V), \Phi(W)).$$

в) Конструкции, проверяющие аксиомы TR1 в) и TR4 (см. п. 1.1), будучи примененными к диаграммам из существенного образа Φ, не выводят за его пределы.

В самом деле, после этого мы сможем индуцировать структуру триангулированной категории с $\mathcal{D}^b$ на существенный образ Φ и затем на эквивалентную ему категорию $\mathcal{M}^b(\Lambda)/\mathcal{F}$.

(В действительности существенный образ Φ совпадает с $\mathcal{D}^b$.)

Опишем теперь метод построения триангулированных категорий, частным случаем которого может считаться теорема 2.3.1.

2.5. Точные категории. а) Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, $\mathcal{B}$ — ее полная аддитивная подкатегория. Предположим, что $\mathcal{B}$ замкнута относительно расширений; по определению, это означает, что в каждой точной тройке $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ в $\mathcal{A}$ с X, $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ объект X изоморфен объекту из $\mathcal{B}$. Пара $(\mathcal{B}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — класс троек $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} X''$ в $\mathcal{B}$, становящихся точными тройками в $\mathcal{A}$, называется *точной категорией*. В частности, каждая абелева категория $\mathcal{A}$ является точной ($\mathcal{E}$ — класс всех точных троек в $\mathcal{A}$).

Точные категории $(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ можно ввести также с помощью некоторой системы аксиом, не апелирующих к объемлющей категории (см., например, Квиллен [122]). Существует канонический способ реализовать $\mathcal{B}$ в виде полной подкатегории абелевой категории (а именно, категории аддитивных функторов $F : \mathcal{B}^0 \to \mathcal{A}$ таких, что для любой тройки $(X \to Y \to Z) \in \mathcal{E}$ последовательность $0 \to F(Z) \to F(Y) \to F(X)$ абелевых групп точна).

Каждую аддитивную категорию $\mathcal{B}$ можно, по крайней мере, одним способом превратить в точную (взяв в качестве $\mathcal{E}$ класс всех расщепимых троек $X \to X \oplus Y \to Y$).

б) $\mathscr{E}$-*инъективные* и $\mathscr{E}$-*проективные объекты.* Пусть $(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ — точная категория. Объект $I \in \mathrm{Ob}\mathscr{E}$ будем называть $\mathscr{E}$-*инъективным*, если любая тройка $(I \to Y \to Z) \in \mathscr{E}$ расщепляется. Класс всех $\mathscr{E}$-инъективных объектов будем обозначать $\mathscr{J}_{\varepsilon}$. Аналогично $P \in \mathrm{Ob}\mathscr{B}$ называется $\mathscr{E}$-*проективным*, если любая тройка $(X \to Y \to P) \in \mathscr{E}$ расщепляется. Класс $\mathscr{E}$-проективных объектов обозначим $\mathscr{P}_{\varepsilon}$.

Инъективные объекты обладают таким свойством: если в диаграмме объектов из $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & Z \\ & I & \end{tikzcd}$$

$(X \to Y \to Z) \in \mathscr{E}$ и $I \in \mathscr{J}_{\mathscr{E}}$, то существует морфизм $g: Y \to I$, делающий ее коммутативной.

Аналогичным свойством обладают $\mathscr{E}$-проективные объекты.

2.6. Фробениусовы категории. а) Точная категория $(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ называется *фробениусовой*, если $\mathscr{I}_{\mathscr{E}} = \mathscr{P}_{\mathscr{E}}$ и для каждого $X \in \mathrm{Ob}\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}$ существуют тройки $Y \to I \to X$, $X \to I' \to Y'$ с $I, I' \in \mathscr{I}_{\mathscr{E}}$ (грубо говоря, инъективные и проективные объекты совпадают и их достаточно много: каждый объект из $\mathscr{B}$ является подобъектом и факторобъектом таких объектов).

В б)—г) приведены примеры фробениусовых категорий.

б) Абелева категория $\mathscr{M}^b(\Lambda)$ конечномерных градуированных Λ-модулей является фробениусовой.

в) Абелева категория конечномерных модулей над групповой алгеброй $k[G]$ конечной группы G является фробениусовой. Вообще, категория конечномерных модулей над любой фробениусовой k-алгеброй (см. Кэртис и Райнер [49]) является фробениусовой.

г) Пусть $\mathscr{B}'$ — аддитивная категория с расщепляющимися идемпотентами (то есть любой морфизм $\alpha: X \to X$ в $\mathscr{B}'$ с $\alpha^2 = \alpha$ задается проекцией на прямое слагаемое). Положим $\mathscr{B} = \mathrm{Kom}^b(\mathscr{B}')$ и определим $\mathscr{E}$ как класс всех таких троек $X^{\cdot} \to Y^{\cdot} \to Z^{\cdot}$, что последовательность $X^i \to Y^i \to Z^i$ расщепляется для каждого i. Тогда $\mathscr{B}$ — фробениусова категория, в которой $\mathscr{E}$-проективными ($= \mathscr{E}$-инъективными) комплексами являются конечные прямые суммы комплексов вида $\ldots \to 0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to \ldots$ с $X \in \mathrm{Ob}\mathscr{B}'$.

2.6.1. Определение. а) Пусть $\mathscr{B}$ — фробениусова категория. Для $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathscr{B}$ обозначим через $I(X, Y)$ множество морфизмов $f: X \to Y$ в $\mathscr{B}$, пропускающихся через некоторый объект из $\mathscr{J}_{\mathscr{E}}$.

б) Определим *стабильную категорию* $\mathscr{B}_0$, полагая $\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}_0 = \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}_0}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(X, Y)/I(X, Y)$. Легко проверить, что композиция морфизмов в $\mathscr{B}_0$ корректно определена и что $\mathscr{B}_0$ — аддитивная категория.

2.7. Надстройка. а) Пусть $\mathscr{B}$ — фробениусова категория. Можно проверить, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "u"] & Y \arrow[d, dashed, "v"] \\ X \arrow[r] & I' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd},$$

в которой строки — тройки из $\mathscr{E}$, и $I, I' \in \mathscr{I}_{\mathscr{E}}$, существуют морфизмы $u: I \to I'$, $v: Y \to Y'$, делающие ее коммутативной в $\mathscr{B}$. Далее, для двух разных продолжений (u, v), $(\tilde{u}, \tilde{v})$ образы v и $\tilde{v}$ в $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}_0}(Y, Y')$ совпадают. Отсюда вытекает, что для любого продолжения (u, v) образ v в $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}_0}(Y, Y')$ является изоморфизмом. Существование канонического продолжения v в $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}_0}(Y, Y')$ позволяет определить *функтор надстройки* $T: \mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_0$ такой, что для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}_0 = \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ имеется тройка $(X \to I \to TX) \in \mathscr{E}$ с $I \in \mathscr{I}_{\mathscr{E}}$.

б) Из совпадения $\mathscr{I}_{\mathscr{E}} = \mathscr{P}_{\mathscr{E}}$ вытекает, что T является автоэквивалентностью категории $\mathscr{B}_0$.

2.8. Выделенные треугольники. Пусть теперь $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$, $u: X \to Y$ — произвольный морфизм и $(X \xrightarrow{i} I \to TX) \in \mathscr{E}$ с $I \in \mathscr{I}_{\mathscr{E}}$. Проверьте, что в диаграмме в $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"] & I \arrow[r] \arrow[d, "t"] & TX \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, dotted, "w"] & TX \end{tikzcd},$$

в которой левый квадрат — кодекартов, существует единственный морфизм, делающий ее коммутативной.

Треугольники $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TX$ в $\mathscr{B}$, возникающие из таких диаграмм, а также их образы в $\mathscr{B}_0$, назовем *стандартными*. Любой треугольник в $\mathscr{B}_0$, изоморфный стандартному, назовем *выделенным*.

2.9. Теорема. Пусть $\mathscr{B}$ — фробениусова категория, $\mathscr{B}_0$ — соответствующая стабильная категория. Предположим, что функтор надстройки является автоморфизмом $T: \mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_0$. Тогда категория $\mathscr{B}_0$ с T в качестве функтора сдвига и с выделенными треугольниками, определенными в предыдущем пункте, триангулирована (это дает, конечно, другое доказательство теоремы 2.3.1).

2.9.1. Один из способов доказать теорему п. 2.9 состоит в следующем. Пусть $\mathscr{E}(\mathscr{I})$ — категория, объектами которой служат ацикличные комплексы объектов из $\mathscr{I}$ (без условий ограниченности), а морфизмами — гомотопические классы морфизмов комплексов. Замечательный результат состоит в том, что категории $\mathscr{E}(\mathscr{I})$ и $\mathscr{B}_0$ эквивалентны. Осуществляющий эквивалентность функтор $\alpha:\mathscr{E}(\mathscr{I})\to\mathscr{B}_0$ строится так. Пусть $X^\cdot \in \mathrm{Ob}\mathscr{E}(\mathscr{I})$; тогда

$$\alpha(X^\cdot)=\mathrm{Ker}\,(d^0: X^0\to X^1)=\mathrm{Im}\,(d^{-1}: X^{-1}\to X^0)$$

(как элемент $\mathrm{Ob}\mathscr{B}_0=\mathrm{Ob}\mathscr{B}$). Квазиобратный функтор $\beta:\mathscr{B}_0\to\mathscr{E}(\mathscr{I})$ сопоставляет объекту $X\in\mathrm{Ob}\mathscr{B}_0$ комплекс

$$\ldots\to P^{-1}\to P^0\xrightarrow{\varepsilon\circ\varepsilon^\cdot} I^0\to I^1\to\ldots,$$

где $P^\cdot\to X\xrightarrow{\varepsilon}0$ и $0\to X\xrightarrow{\varepsilon^\cdot} I^\cdot$ левая и правая резольвенты X состоящие из проективных (=инъективных) объектов. Далее, $\mathscr{E}(\mathscr{I})$ обладает естественной структурой триангулированной категории. Поэтому, проверяя, что α переводит функтор сдвига и выделенные треугольники в $\mathscr{E}(\mathscr{I})$ в функтор сдвига и выделенные треугольники в $\mathscr{B}_0$, мы получаем теорему 2.9.

2.9.2. **Когомологии Тэйта.** Пусть G — конечная группа, k — либо конечное поле F_q, либо кольцо $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $A=K[G]$ — групповое кольцо G над K. Тогда категория $B=A$-mod конечно порожденных A-модулей фробениусова (см. [49]). Пусть B_0 — соответствующая стабильная категория. Тогда для любого A-модуля M группа $\mathrm{Hom}_{B_0}(K, M[i])$ (где K — тривиальный одномерный A-модуль) совпадает с группой i-мерных когомологий Тэйта (см. [18, гл. 4]) группы G с коэффициентами в M.

§ 3. Сердцевины

3.1. Постановка задачи. Важным открытием последних лет в гомологической алгебре было обнаружение того обстоятельства, что одна и та же триангулированная категория может быть производной от нескольких совершенно разных абелевых категорий.

В этом параграфе излагается в аксиоматической форме технический аппарат, предназначенный для вылавливания разных абелевых подкатегорий внутри общей триангулированной категории — формализм t-структур.

Аксиоматика t-структур формализует следующую ситуацию. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория, $\mathscr{D}=\mathscr{D}^*(A)$ — ее производная категория. Обозначим через $\mathscr{D}^{\geqslant n}$ (соответственно $\mathscr{D}^{\leqslant n}$) полную подкатегорию в D, состоящую из комплексов $K^\cdot$ с $H^i(K^\cdot)=0$ при $i<n$ (соответственно при $i>n$).

Тогда, согласно предложению гл. 4, п. 3.1.1, полная подкатегория $\mathcal{D}^{\geqslant 0}\cap\mathcal{D}^{\leqslant 0}$ и есть $\mathcal{A}$, точнее, отождествляется с $\mathcal{A}$ посредством функтора $\mathcal{A}\to${категория 0-комплексов$=\mathcal{D}^{\geqslant 0}\cap\mathcal{D}^{\leqslant 0}$}.

Для доказательства абелевости пересечения $\mathcal{D}^{\geqslant 0}\cap\mathcal{D}^{\leqslant 0}$ нужны лишь следующие абстрактные свойства.

3.2. Определение. *t-структурой* на триангулированной категории $\mathcal{D}$ называется пара строго полных подкатегорий $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 0})$, удовлетворяющая следующим условиям. Положим $\mathcal{D}^{\leqslant n}=\mathcal{D}^{\leqslant 0}[-n]$ и $\mathcal{D}^{\geqslant n}=\mathcal{D}^{\geqslant 0}[-n]$. Тогда:

а) $D^{\leqslant 0}\subset D^{\leqslant 1}$ и $\mathcal{D}^{\geqslant 0}\supset\mathcal{D}^{\geqslant 1}$.

б) Если $X\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, $Y\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\geqslant 1}$, то $\mathrm{Hom}\mathcal{D}(X, Y)=0$.

в) Для каждого $X\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}$ существует выделенный треугольник $A\to X\to B\to A$ [1] с $A\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, $B\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\geqslant 1}$.

Сердцевиной t-структуры называется полная подкатегория $\mathcal{A}=\mathcal{D}^{\geqslant 0}\cap\mathcal{D}^{\leqslant 0}$.

Это определение мотивируется следующим предложением.

3.3. Предложение. Если $\mathcal{D}=\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ — производная категория, то описанная в п. 3.1 пара $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 0})$ является t-структурой с сердцевиной $\mathcal{A}$.

Основное свойство сердцевин триангулированных категорий таково:

3.4. Теорема. Сердцевина $\mathcal{A}=\mathcal{D}^{\leqslant 0}\cap\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ любой t-структуры является абелевой категорией.

План доказательства. Прежде всего следует построить *срезающие функторы* τ, связанные с t-структурой (см. гл. 4, п. 2.10).

3.4.1. Лемма. а) Существуют функторы $\tau_{\leqslant n}:\mathcal{D}\to\mathcal{D}^{\leqslant n}$ (соответственно $\tau_{\geqslant n}\mathcal{D}\to\mathcal{D}^{\geqslant n}$), сопряженные справа (соответственно слева) к функторам вложения. $\mathcal{D}^{\leqslant n}\to\mathcal{D}$ (соответственно $\mathcal{D}^{\geqslant n}\to\mathcal{D}$).

б) Для любого $X\in Ob\mathcal{D}$ существует выделенный треугольник вида

$$\tau_{\leqslant 0}X\to X\to\tau_{\geqslant 1}X\xrightarrow{d}\tau_{\leqslant 0}X\,[1] \tag{1}$$

и любые два выделенных треугольника $A\to X\to B\to A[1]$ с $A\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, $B\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ канонически изоморфны.

Доказательство. Проверим существование $\tau_{\leqslant 0}$ и $\tau_{\geqslant 1}$, остальные случаи разбираются аналогично.

Для каждого X выберем выделенный треугольник $A\to X\to B\to A[1]$ с $A\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, $B\in\mathrm{Ob}\mathcal{D}^{\geqslant 1}$ и определим на объектах $\tau_{\leqslant 0}X=A$. $\tau_{\geqslant 1}X=B$. Пусть $f:X\to Y$ — морфизм, $A'\to Y\to B'\to A'[1]$ — соответствующий объекту Y треугольник. Покажем, что композиция $A\to X\to Y$ однозначно пропускается через A'. В самом деле, имеем точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(A, B'[1])\to\mathrm{Hom}(A, A')\to\mathrm{Hom}(A, Y)\xrightarrow{f}\mathrm{Hom}(A, B').$$

В силу п. 3.2б) и п. 3.2а), две крайние группы равны нулю. Поэтому по $f:X\to Y$ однозначно восстанавливается морфизм

$\tau_{\leqslant 0}(f): A \to A'$, и набор этих морфизмов, очевидно, дополняет $\tau_{\leqslant 0}$ до функтора. Аналогично устанавливается функториальность $\tau_{\geqslant 1}$ и вместе с тем однозначность треугольников $A \to X \to B \to A$ [1].

Сопряженность $\tau_{\leqslant 0}$ с вложением $\mathscr{D}^{\leqslant 0} \to \mathscr{D}$ устанавливается посредством изоморфизма функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}^{\leqslant 0}}(A, \tau_{\leqslant 0} Y) \tilde{\to} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, Y), \quad A \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{D}^{\leqslant 0},$$

который построен выше; аналогично рассматривается $\tau_{\geqslant 1}$.

3.4.2. **Связи между срезающими функторами.** Функторы τ обладают следующими свойствами (очевидными в случае $\mathscr{D} = D^*(\mathscr{A})$).

а) $\tau_{\leqslant n} X = 0$ в том и только том случае, когда $X \to \tau_{\geqslant n+1} X$ есть изоморфизм.

б) Если $m \leqslant n$, то имеются естественные изоморфизмы $\tau_{\leqslant m} X \to \tau_{\leqslant m} \tau_{\leqslant n} X$ и $\tau_{\geqslant n} X \to \tau_{\geqslant n} \tau_{\geqslant m} X$.

в) Если $m \leqslant n$, то существует естественный изоморфизм $\tau_{\geqslant m} \tau_{\leqslant n} X \to \tau_{\leqslant n} \tau_{\geqslant m} X$ $(\overset{\mathrm{df}}{=} \tau_{[m,\, n]} X)$.

3.4.3. **Конструкция ядер и коядер в $\mathscr{A} = \mathscr{D}^{\leqslant 0} \cap \mathscr{D}^{\geqslant 0}$.** Пусть теперь $f: X \to Y$ — морфизм в $\mathscr{A}$. Обозначим через Z конус морфизма f и положим

$$K = \tau_{\leqslant -1} Z, \quad C = \tau_{\geqslant 0} Z.$$

Определены композиции $k: \tau_{\leqslant -1} Z \to Z \to X[1]$ и $c: Y \to Z \to \tau_{\geqslant 0} Z$. Используя свойства а)—в) предыдущего пункта, несложно проверить, что $(K[-1], k[-1])$ и (C, c) суть ядро и коядро морфизма f и что коядро морфизма $k[-1]: K[-1] \to X$ совпадает с ядром морфизма $c: Y \to C$.

3.5. **Функторы когомологий.** Пусть $\mathscr{D}$ — триангулированная категория, $A = \mathscr{D}^{\leqslant 0} \cap \mathscr{D}^{\geqslant 0}$ — сердцевина некоторой t-структуры в $\mathscr{D}$. Положим

$$H^0 = \tau_{[0,\, 0]}: \mathscr{D} \to \mathscr{A}, \quad H^i(X) \mapsto H^0(X[i]): \mathscr{D} \to \mathscr{A}.$$

Если $\mathscr{D} = D^*(\mathscr{A})$ с t-структурой из п. 3.1, то H^i — обычные когомологии комплексов.

3.5.1. Теорема. а) H^0 является когомологическим функтором. Предположим дополнительно, что $\bigcap\limits_n \mathrm{Ob}\mathscr{D}^{\geqslant n} = \bigcap\limits_n \mathrm{Ob}\mathscr{D}^{\geqslant n} = \{0\}$ (такая t-структура называется *невырожденной*). Тогда

б) Морфизм $f: X \to Y$ в $\mathscr{D}$ является изоморфизмом в том и только том случае, если все $H^i(f)$ изоморфизмы в $\mathscr{A}$.

в) $\bigcap\limits_n \mathrm{Ob}\mathscr{D}^{\leqslant n} = \{X \in \mathrm{Ob}\mathscr{D} \mid H^i(X) = 0$ для всех $i > n\}$.

Аналогично, $\bigcap\limits_n \mathrm{Ob}\mathscr{D}^{\geqslant n} = \{X \in \mathrm{Ob}\mathscr{D} \mid H^i(X) = 0$ для всех $i < n\}$. ■

3.6. **t-точные функторы.** Пусть $\mathscr{D}$, $\tilde{\mathscr{D}}$ — две триангулированные категории, на каждой из которых задана t-структура, и $F: \mathscr{D} \to \tilde{\mathscr{D}}$ — точный функтор (то есть F коммутирует со сдвигом и переводит выделенные треугольники в выделенные). Назовем F *t-точным слева*, если $F(\mathcal{D}^{\geqslant 0})\subset\tilde{\mathcal{D}}^{\geqslant 0}$, *$t$-точным справа*, если $F(\mathcal{D}^{\leqslant 0})\subset\tilde{\mathcal{D}}^{\leqslant 0}$, и *$t$-точным*, если он t-точен одновременно справа и слева.

Это определение моделирует, конечно, ситуацию, когда $\mathcal{D}=D(\mathcal{A})$, $\tilde{\mathcal{D}}=D(\tilde{\mathcal{A}})$ — производные категории абелевых категорий $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}$, F — производный функтор (левый или правый) функтора $\varphi:\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}$ (точного слева, справа или с двух сторон соответственно).

Отметим, что для восстановления φ по F на языке t-структур следует поступить так: Пусть $\mathcal{D}$, $\tilde{\mathcal{D}}$ — две триангулированные категории с t-структурами, $\mathcal{A}$, $\tilde{\mathcal{A}}$ — сердцевины этих t-структур. Зададим функтор $\varphi:\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}$ формулой

$$\varphi(X)=H^0(F(X)),\quad X\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}\subset\mathrm{Ob}\mathcal{D}.$$

где H^0 — функтор когомологий в $\tilde{\mathcal{D}}$. Тогда φ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, который точен слева, справа, или с двух сторон, если F был точен слева, справа или с двух сторон соответственно (в последнем случае H^0 можно не применять, поскольку $F(\mathcal{A})\subset\tilde{\mathcal{D}}^{\leqslant 0}\cap\tilde{\mathcal{D}}^{\geqslant 0}=\tilde{\mathcal{A}}$).

3.7. **Производная категория сердцевины.** Пусть $\mathcal{D}$ — триангулированная категория с t-структурой, $\mathcal{A}$ — ее сердцевина. Вообще говоря, мы не можем ничего сказать о связи категории $\mathcal{D}$ с производной категорией $D(\mathcal{A})$. Так, в общем случае не удается даже связать $\mathcal{D}$ с категорией комплексов над $\mathcal{A}$. Причина этого кроется в неоднозначности конструкции конуса $C(f)$ морфизма f в $\mathcal{D}$: для построения функтора $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})\to\mathcal{D}$ нам нужно уметь сопоставлять комплексам над $\mathcal{A}$ объекты из $\mathcal{D}$. Комплексу, состоящему из одного ненулевого объекта X из $\mathcal{A}$, стоящего на месте n, сопоставляется, конечно, объект $X[n]$ из $\mathcal{D}$. Однако уже для комплексов длины 2 возникают сложности: единственным разумным кандидатом на роль объекта из $\mathcal{D}$, отвечающего комплексу

$$\ldots\to 0\to A\to B\to 0\to\ldots,$$

является третья вершина $C=C(f)$ выделенного треугольника $A\xrightarrow{f}B\to C\to A[1]$ в $\mathcal{D}$ (напомним, что $\mathcal{A}$ — полная подкатегория в $\mathcal{D}$). Однако такое сопоставление не функториально, поскольку C определяется лишь с точностью до *неканонического* изоморфизма.

Существует, однако, широкий класс ситуаций, когда наличие каких-либо дополнительных структур позволяет построить точный функтор $D(\mathcal{A})\to\mathcal{D}$ (где $\mathcal{A}$ — сердцевина t-структуры в $\mathcal{D}$). В следующем пункте мы выясним, когда такой функтор является эквивалентностью категорий.

3.7.1. Определение. t-структура $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ называется *ограниченной*, если она невырождена (см. формулировку теоремы п. 3.5.1) и, кроме того, для любого $X \in \mathrm{Ob}\mathscr{D}$ лишь конечное число объектов $H^i(X) \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$ отлично от 0.

Ясно, что стандартная t-структура в $D^b(\mathscr{A})$ ограничена, а в $D(\mathscr{A})$ — неограничена.

3.7.2. Определение. Пусть $(\mathscr{D}^{\leqslant 0}, \mathscr{D}^{\geqslant 0})$ — t-структура в $\mathscr{D}$, A — ее сердцевина. Определим группы $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y)$ для X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, полагая

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y[n]). \blacksquare$$

В случае, когда $\mathscr{D} = D(\mathscr{A})$, группы $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y)$ совпадают, очевидно, с группами $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y)$ (см. определение в гл. 4, п. 3.2.1). Ясно также, что для $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y)$ определена композиция

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y) \times \mathrm{Ext}^j_{\mathscr{D}}(Y, Z) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathscr{D}}(X, Z)$$

(аналогично гл. 4, п. 3.3, а). Следующая теорема показывает, что отличие $\mathscr{D}$ от $D^b(\mathscr{A})$ улавливается отличием $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y)$ от $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(X, Y)$.

3.7.3. Теорема. Пусть $\mathscr{A}$ — сердцевина ограниченной t-структуры в триангулированной категории $\mathscr{D}$ и $F: D^b(\mathscr{A}) \to \mathscr{D}$ — t-точный функтор. Тогда F является эквивалентностью категорий в том и только том случае, если $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{D}}$ порождается $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}}$ (т. е. каждый элемент $\alpha \in \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}(X, Y)$, X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, представляется в виде линейной комбинации мономов $\beta_1\beta_2\ldots\beta_i$, $\beta_k \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{D}}(X_k, X_{k+1})$ с $X_1 = X$, $X_{i+1} = Y$). $\blacksquare$

Отметим, что интерпретация $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}$ по Йонеде (гл. 4, теорема п. 3.4, в) показывает, что $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}}$ порождается $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$, так что условие теоремы во всяком случае необходимо.

3.8. Склейка t-структур. Важным методом построения новых t-структур является теорема о склейке, позволяющая связывать t-структуры на триангулированной категории $\mathscr{D}$ с t-структурами на ее толстой подкатегории $\mathscr{C}$ и на соответствующей факторкатегории $\mathscr{E}$ (см. п. 1.10).

Пусть

$$\mathscr{C} \xrightarrow{P} \mathscr{D} \xrightarrow{Q} \mathscr{E} \qquad (2)$$

— точная тройка триангулированных категорий (см. п. 1.10.2) и на ее членах $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ заданы t-структуры. Будем говорить, что эти t-структуры *согласованы* (или тройка (2) *t-точна*), если P и Q — t-точные функторы.

Ясно, прежде всего, что t-структура на $\mathscr{D}$ однозначно определяет согласованные t-структуры на $\mathscr{C}$ и $\mathscr{E}$ (именно $\mathscr{C}^{\leqslant 0}=\mathscr{C}\cap\mathscr{D}^{\leqslant 0}$, $\mathscr{E}^{\leqslant 0}=Q\mathscr{D}^{\leqslant 0}$ и аналогично для $\mathscr{E}^{\geqslant 0}$, $\mathscr{E}^{\geqslant 0}$). Обратно, для данных t-структур на $\mathscr{C}$ и на $\mathscr{E}$ имеется не более одной согласованной с ними t-структуры на $\mathscr{D}$. Точнее,

3.8.1. Теорема. Пусть $\mathscr{C}\xrightarrow{P}\mathscr{D}\xrightarrow{Q}\mathscr{E}$ — t-точная тройка триангулированных категорий. Положим

$$^{\perp}(P\mathscr{C}^{>0})=\{X\in\mathrm{Ob}\mathscr{D}\,|\,\mathrm{Hom}(X,Y)=0 \text{ для всех } Y\in P(\mathscr{C}^{>0})\},$$
$$(P\mathscr{C}^{<0})^{\perp}=\{X\in\mathrm{Ob}\mathscr{D}\,|\,\mathrm{Hom}(Y,X)=0 \text{ для всех } Y\in P(\mathscr{C}^{<0})\}.$$

Тогда t-структура на $\mathscr{D}$ определяется по t-структурам на $\mathscr{C}$ и $\mathscr{E}$ формулами

$$\mathscr{D}^{<0}=Q^{-1}(\mathscr{E}^{<0})\cap{}^{\perp}(P\mathscr{C}^{>0}),$$
$$\mathscr{D}^{>0}=Q^{-1}(\mathscr{E}^{>0})\cap(P\mathscr{C}^{<0})^{\perp}. \blacksquare$$

Для данных t-структур на $\mathscr{C}$ и $\mathscr{E}$ может не существовать ни одной согласованной с ними t-структуры на $\mathscr{D}$. Имеется, однако, важный класс ситуаций, когда существование подходящей t-структуры на $\mathscr{D}$ можно гарантировать.

3.8.2. Теорема. Пусть $\mathscr{C}\xrightarrow{P}\mathscr{D}\xrightarrow{Q}\mathscr{E}$ — точная тройка триангулированных категорий и пусть P обладает левым и правым сопряженными функторами (это эквивалентно тому, что Q обладает левым и правым сопряженными функторами). Тогда для любых t-структур на $\mathscr{C}$ и $\mathscr{E}$ существует согласованная с ними t-структура на $\mathscr{D}$. $\blacksquare$

3.9. Примеры. Нетривиальные примеры t-структур в производных категориях пучков на топологических пространствах возникают в связи с теорией так называемых превратных пучков (см. гл. 7).

3.9.1. Связь категорий пучков на пространстве и его подпространствах. Ниже описывается аксиоматический подход к следующей ситуации: X — топологическое пространство, $U\subset X$ — открытое подмножество, $Y=X-U$, $i:Y\to X$, $j:U\to X$ — вложения, $\mathscr{A}_X$, $\mathscr{A}_Y$, $\mathscr{A}_U$ — категории пучков абелевых групп на X, Y, U; $\mathscr{D}_X$, $\mathscr{D}_Y$, $\mathscr{D}_U$ — соответствующие производные категории (скажем, ограниченных комплексов).

Рассмотрим следующие 6 функторов:

$$Rj_*,\ j_!:\mathscr{D}_U\to\mathscr{D}_X;\quad j^*:\mathscr{D}_X\to\mathscr{D}_U;$$
$$i_*:\mathscr{D}_Y\to\mathscr{D}_X;\quad i^*,\ i^!:\mathscr{D}_X\to\mathscr{D}_Y$$

(см. гл. 4, § 5; функтор $i^!$ можно определить как правый производный функтор от точного слева функтора «сечения с носителем в Y», см. гл. 4, п. 5.5). Эти функторы обладают следующими свойствами.

а) Все они — точные функторы между соответствующими триангулированными категориями.

б) $i^{\cdot}$ и $i^{!}$ сопряжены $i_{\cdot}$ соответственно слева и справа.

в) $j_{!}$ и $Rj_{\cdot}$ сопряжены $j^{\cdot}$ соответственно слева и справа.

г) Выполнено равенство $j^{\cdot}i_{\cdot}=0$. По сопряженности, отсюда вытекает, что $i^{\cdot}j_{!}=0$, $i^{!}Rj_{\cdot}=0$ и для $\mathscr{G}^{\cdot}\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}_Y$, $\mathscr{H}^{\cdot}\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}_U$ имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(j_{!}\mathscr{H}^{\cdot},\ i_{\cdot}\mathscr{G}^{\cdot})=0,\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(i_{\cdot}\mathscr{G}^{\cdot},\ Rj_{\cdot}\mathscr{H}^{\cdot})=0.$$

д) Существуют (функториальные по $\mathscr{F}^{\cdot}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_X$) морфизмы

$$w: i_{\cdot}i^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}\to j_{!}j^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}[1],\quad w': Rj_{\cdot}j^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}\to i_{\cdot}i^{!}\mathscr{F}^{\cdot}[1],$$

для которых треугольники

$$j_{!}j^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{u}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{v}i_{\cdot}i^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{w}j_{!}j^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}[1],$$

$$i_{\cdot}i^{!}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{u'}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{v'}Rj_{\cdot}j^{\cdot}\mathscr{F}^{\cdot}\xrightarrow{w'}i_{\cdot}i^{!}\mathscr{F}^{\cdot}[1]$$

выделены (здесь u, u', v, v' — морфизмы сопряжения, отвечающие функторам из б) и в)). Ввиду г) и следствия п. 1.5 w и w' определены однозначно.

е) Морфизмы сопряжения

$$i^{\cdot}i_{\cdot}\mathscr{G}^{\cdot}\to\mathscr{G}^{\cdot}\to i^{!}i_{\cdot}\mathscr{G}^{\cdot},\ \mathscr{G}^{\cdot}\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}_Y,$$

$$j^{\cdot}Rj_{\cdot}\mathscr{H}^{\cdot}\to\mathscr{H}^{\cdot}\to j^{\cdot}j_{!}\mathscr{H}^{\cdot},\ \mathscr{H}^{\cdot}\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}_U.$$

являются изоморфизмами.

3.9.2. Склейка. Набор из трех триангулированных категорий $\mathscr{D}_X$, $\mathscr{D}_Y$, $\mathscr{D}_U$ (уже не обязательно связанных с категориями пучков) и шести точных функторов между ними, удовлетворяющих условиями а) — е) выше, называется *данными склейки*. Один из примеров данных склейки описан в предыдущем пункте. Можно проверить также, что данные склейки получаются, если подходящим образом определить соответствующие функторы в категориях алгебраических когерентных пучков (X, Y, U — алгебраические многообразия или схемы) или в категориях пучков на этальных топологиях.

Предположим теперь, что у нас есть данные склейки. Несложно проверить, что тройка $\mathscr{D}_Y\xrightarrow{i_{\cdot}}\mathscr{D}_X\xrightarrow{j^{\cdot}}\mathscr{D}_U$ является точной тройкой триангулированных категорий. Поскольку у $i_{\cdot}$ имеются левый и правый сопряженные, теоремы п. 3.8.1 и п. 3.8.2 показывают, что любая пара t-структур $(\mathscr{D}_Y^{\leqslant 0}, \mathscr{D}_Y^{\geqslant 0})$ на $\mathscr{D}_Y$ и $(\mathscr{D}_U^{\leqslant 0}, \mathscr{D}_U^{\geqslant 0})$ на $\mathscr{D}_U$ однозначно определяет согласованную с ними t-структуру на $\mathscr{D}_X$. Более того, $\mathscr{D}_X^{\leqslant 0}$ и $\mathscr{D}_X^{\geqslant 0}$ для этой t-структуры задаются равенствами

$$\mathscr{D}_X^{\leqslant 0}=\{\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_X \mid j^{\cdot}\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_U^{\leqslant 0},\ i^{\cdot}\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_Y^{\leqslant 0}\},$$

$$\mathscr{D}_X^{\geqslant 0}=\{\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_X \mid j^{\cdot}\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_U^{\geqslant 0},\ i^{\cdot}\mathscr{F}\in \mathrm{Ob}\mathscr{D}_Y^{\geqslant 0}\},$$

Этот результат о склейке t-структур в ситуации, когда у нас есть данные склейки, был доказан А. А. Бейлинсоном, И. Н. Бернштейном и Делинем (см. [25], п. 1.4) и применен ими для построения категорий превратных пучков (см. гл. 7.). С помощью подобных склеек можно также строить различные нестандартные t-структуры на $\mathcal{D}_X$, склеивая сдвинутые t-структуры на $\mathcal{D}_U$ и $\mathcal{D}_Y$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Понятие триангулированной категории, обсуждаемое в § 1, возникло в результате попыток аксиоматизировать основные свойства комплексов, рассматриваемых с точностью до квазиизоморфизма, без апелляции к исходной абелевой категории. Первоисточниками здесь являются записки Хартсхорна [85] и диссертация Вердье [141]; см. также [84], [91]. Доказательство результатов, приведенных в § 1, можно найти в [85] или в [8].

В § 2 приведены примеры нестандартных триангулированных категорий, связь которых с производными категориями не сразу ясна. Первый пример (пп. 2.1—2.4) дает представление о так называемой «S—Λ-двойственности», позволяющей получить двойственное по отношению к теореме Серра описание когерентных алгебраических пучков на проективных пространствах. Доказательство теоремы п. 2.3 и дальнейшие обобщения см. [1], [4], [7], [8], [94], [125].

Одно из наблюдений, лежащих в основе S—Λ-двойственности из [4], состоит в том, что производные категории $D^*(\mathcal{A})$, $D^*(\mathcal{B})$ могут быть эквивалентны даже в том случае, когда исходные абелевы категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ были неэквивалентны. Такая ситуация возникает, в частности, в теории так называемых согласующих (tilting) модулей, играющих важную роль в изучении категорий модулей над конечномерными алгебрами. Подробное изложение теории согласующих модулей содержится в книге Хаппеля [84]. С этой же теорией согласующих модулей связан и второй приведенный в § 2 метод построения триангулированных категорий (пп. 2.5—2.9). Доказательства приведенных здесь результатов (в частности, теоремы п. 2.9) можно найти в [84].

Теория сердцевин, излагаемая в § 3, решает задачу, в некотором смысле обратную той, которая обсуждалась в гл. 4: выделение абелевой категории $\mathcal{A}$ внутри триангулированной категории $D(\mathcal{A})$. Эта задача, возникшая в связи с теорией превратных пучков (см. гл. 7), обсуждалась в работе [25], где можно найти доказательства сформулированных в § 3 результатов.

Глава 6

СМЕШАННЫЕ СТРУКТУРЫ ХОДЖА

Введение

Любая теория (ко)гомологий может рассматриваться как аппарат для линеаризации нелинейных задач. Она отображает некоторый геометрический универсум — категорию топологических пространств, сайт, топос и т. п. — в некоторый алгебраический универсум — модули, модули со структурами, комплексы и т. п., — сохраняющий достаточно много свойств категории линейных пространств.

В этой главе основным геометрическим универсумом является категория комплексных алгебраических многообразий, возможно, некомпактных и с особенностями, а основным алгебраическим универсумом — категория структур Ходжа. Функтор из первой во вторую является современной версией классической теории периодов дифференциальных форм.

Предметом классической теории Ходжа были когомологии (с постоянными коэффициентами) гладких проективных многообразий. Ее основные результаты: конструкция (p, q)-разложения, сильная теорема Лефшеца (разложение по примитивным циклам), теорема об индексе формы пересечения (поляризация на примитивных циклах). Инструмент: (глобальная) теория гармонических форм и (локальные) тождества Кэлера.

В середине 60-х годов была осознана очень важная для дальнейшего развития теории аналогия между (p, q)-разложением и представлением группы Галуа на этальных когомологиях. Формальная ее часть очень проста: (p, q)-разложение — это действие тора $\mathbf{C}^*$ (см. § 1), а теория полей классов отождествляет мультипликативную группу (неархимедова) локального поля с максимальным абелевым фактором его группы Галуа; таким образом, (p, q)-разложение — это архимедов аналог представления Галуа. Неформальная часть аналогии загадочна: представления Галуа возникают из симметрий Галуа этальной топологии; структуры Ходжа имеют другое, гораздо более темное происхождение: скрытые «симметрии Ходжа», порождающие эти структуры, до сих пор неизвестны. Во всяком случае, эта аналогия заставляла предположить существование естественной структуры Ходжа на когомологиях произвольных (не обязательно гладких или компактных) алгебраических многообразий. Важное отличие от обычной теории Ходжа состоит в существовании на одной и той же группе когомологий (p, q)-компонент *разного* веса (как показывает пример кривых, см. § 2). Соответствующая структура линейной алгебры — смешанная структура Ходжа — была предложена Делинем (см. § 1) вместе с конструкцией смешанной структуры Ходжа на когомологиях произвольных алгебраических многообразий (с постоянными коэффициентами). Эта конструкция чисто алгебраическая: она сводит общий случай к гладкому проективному, используя теорему Хиронаки о разрешении особенностей. Следует отметить, что «естественная» (не использующая разрешения и компактификации) конструкция не известна до сих пор; в частности, неизвестно, какой анализ стоит за смешанными структурами Ходжа (см., однако, работы А. Н. Варченко и др. [5, 6] о смешанных структурах Ходжа, связанных с особенностями функций).

Далее, приведенная выше аналогия требует существования подходящей функториальной категории «пучков Ходжа» (=структур Ходжа на конструктивных пучках). Попытки построить такую категорию начались с работ Гриффитса по вариациям структур Ходжа (60-е годы), однако лишь сейчас, по-видимому, эта теория построена в работе Саито [126].

Пример. Пусть $\mathcal{X}_S$ — семейство гладких проективных многообразий, зависящих от параметра $s \in S$. На S возникает локальная система когомологий слоев $\mathcal{H}_s^{\cdot} = H^{\cdot}(X_s, \mathbf{Z})$; $\mathcal{H}_s^{\cdot}$ снабжены структурами Ходжа, непрерывно зависящими от параметра s. Рассмотрим максимальную постоянную локальную подсистему $\mathcal{H}^f \subset \mathcal{H}^{\cdot}$ (ее слой — инварианты монодромии). Тогда $\mathcal{H}_s^f$ — подструктура Ходжа в $\mathcal{H}_s$, не зависящая от s. Аналогичный факт в арифметической ситуации очевиден (именно из-за существований симметрий Галуа); в ходжевой ситуации это достаточно нетривиально.

Следует отметить, что большинство результатов о топологии комплексных алгебраических многообразий (начиная с теоремы Гротендика о квазиунипотентности локальной монодромии) было доказано арифметическими методами; после доказательства Делинем гипотез Вейля и создания им удобной функториальной техники смешанных пучков в конечной характеристике арифметические методы оказались вне конкуренции. Сейчас, благодаря работе Саито, эти результаты могут быть передоказаны в рамках теории Ходжа. Впрочем, хотя единосущность теории Ходжа и арифметики и может считаться экспериментально установленным фактом, сегодня она столь же необъяснима, как и 20 лет назад.

В широком смысле основной вопрос теории структур Ходжа можно сформулировать так: насколько когомологии Ходжа близки к универсальным, «мотивным» когомологиям, определение которых было предложено Гротендиком? В простейшем варианте мотив есть объект некоторого расширения категории алгебраических многообразий с соответствиями в качестве морфизмов, которое состоит в том, что к алгебраическим многообразиям добавлены формальные ядра и коядра проекторов. Соответствия рассматриваются с точностью до некоторого отношения эквивалентности (рациональной, целочисленной и т. п.), от выбора которой зависит, насколько мотивные когомологии учитывают алгебро-геометрические тонкости.

Развитие теории мотивов затрудняется недоказанностью так называемых «стандартных гипотез», и с этой точки зрения некоторые основные задачи и результаты последних лет в теории структур Ходжа относятся к следующим направлениям.

а) Реконструкция многообразия по его когомологиям со структурой Ходжа: проблемы типа Торелли. Сюда же можно отнести аналогичные задачи для семейств многообразий. В ряде конкретных случаев из вариаций структур Ходжа удается извлечь больше информации, чем из значения в точке, в силу теоремы Гриффитса о трансверсальности. Поэтому их можно изучать инфинитезимальными методами, что и было сделано в серии работ Гриффитса и его учеников.

б) Распознавание морфизмов многообразий и, более общо, алгебраических соответствий между ними среди общих морфизмов структур Ходжа: *проблемы типа гипотез Ходжа* о характеризации алгебраических классов когомологий.

Обе эти задачи вместе имеют целью выяснить, в какой мере алгебро-геометрическая информация сохраняется при переходе к структурам Ходжа.

в) Проблема описания вариаций структур Ходжа, имеющих алгебро-геометрическое происхождение, и введения структур Ходжа на когомологиях с коэффициентами в пучках структур Ходжа.

г) Конструкция смешанных структур Ходжа на других топологических инвариантах многообразий: гомотопических группах, когомологиях Делиня—Горески—Макферсона, L_2-когомологиях и т. п.

Смешанные структуры Ходжа образуют абелеву категорию $\mathcal{H}$, и вполне естественно ввести в рассмотрение соответствующую производную категорию. В связи с общей тематикой этой статьи мы подчеркиваем гомологические свойства $\mathcal{H}$ и $D(\mathcal{H})$, уделяя меньше внимания геометрическим свойствам функтора когомологий Ходжа, который описан также в других выпусках этой серии.

§ 1. Категория структур Ходжа

1.1. Определение. Пусть $A\subset\mathbf{R}$ — такое нётерово кольцо, что $A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ является полём, M_A — A-модуль конечного типа. *Чистой структурой Ходжа веса* n ($n\in\mathbf{Z}$) на M_A называется любой из следующих трех наборов данных:

а) Конечная убывающая фильтрация на $M_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\otimes_A M_A$, $\ldots F^pM_{\mathbf{C}}\supset\supset F^{p+1}M_{\mathbf{C}}\supset\ldots$, со свойством

$$F^pM_{\mathbf{C}}\oplus\overline{F^qM_{\mathbf{C}}}=M_{\mathbf{C}} \text{ для всех } p+q=n+1.$$

б) Действие $\mathbf{C}^*$ на $M_{\mathbf{C}}$, происходящее из вещественного представления алгебраического двумерного тора, такое, что вещественные числа $a\in\mathbf{R}^*\subset\mathbf{C}^*$ действуют умножением на a^n.

в) Двойная градуировка на $M_{\mathbf{C}}$:

$$M_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

со свойством $\overline{M^{p,q}}=M^{q,p}$ (где комплексное сопряжение оставляет инвариантным $M_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\otimes_A M_A$). ■

Эквивалентность этих данных устанавливается так:

а)⇒в): $M^{p,q}=F^pM_{\mathbf{C}}\cap\overline{F^qM_{\mathbf{C}}}$;

в)⇒а): $F^pM_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{i\geqslant p} M^{i,j}$;

б)⇔в): $M^{p,q}=\{m\in M_{\mathbf{C}}\mid z\in\mathbf{C}^*$ переводит m в $z^p\bar{z}^q m\}$.

1.2. Определение. В той же ситуации *смешанной структурой Ходжа* на нетеровом A-модуле M_A называется следующий набор данных:

Конечная убывающая фильтрация $F^pM_{\mathbf{C}}$ (фильтрация Ходжа) и конечная возрастающая фильтрация $W_i(M_A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q})$ (весовая фильтрация), которые удовлетворяют условию: $\mathrm{Gr}_n^W(M_A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q})$ вместе с фильтрацией, индуцированной F на комплексификации этого модуля, образует чистую структуру Ходжа веса n для всех $n\in\mathbf{Z}$. ■

Структура Ходжа на A-модуле называется также A-структурой Ходжа.

1.3. Морфизмы. Морфизмом смешанных A-структур Ходжа $(M_A, W, F)\to(N_A, W, F)$ называется такой морфизм A-модулей $f: M_A\to N_A$, который индуцирует морфизмы, согласованные с фильтрациями W, F (и тем самым, $\bar{F}$). Существенно, что отсюда автоматически следует строгая согласованность морфизмов с фильтрациями: $f(M_{\mathbf{C}})\cap F^pN_{\mathbf{C}}=f(F^pM_{\mathbf{C}})$ и т. п. Это устанавливается по ходу доказательства следующего результата:

1.4. Теорема. Смешанные A-структуры Ходжа образуют абелеву категорию $\mathcal{H}_A$. Ядра и коядра морфизмов в ней совпадают с обычными ядрами и коядрами, фильтрации на которых индуцированы фильтрациями исходных объектов.

1.5. Тензорная алгебра. Пусть $M=(M_A, W, F)$, $N=(N_A, W, F)$ — две смешанные структуры Ходжа. Положим

$$(M\otimes N)_A=M_A\otimes_A N_A,$$

$$W_i((M\otimes N)_A\otimes\mathbf{Q})=\mathrm{Im}\left(\sum_{k+l=i}W_k(M_A\otimes\mathbf{Q})\otimes W_l(N_A\otimes\mathbf{Q})\right),$$

$$F^p((M\otimes N)_{\mathbf{C}}=\mathrm{Im}\left(\sum_{k+l=p}F^k(M_{\mathbf{C}})\otimes F^l(N_{\mathbf{C}})\right).$$

Эти данные образуют смешанную структуру Ходжа, называемую *тензорным произведением* исходных структур.

Подобным же образом определяется внутренний **Hom**:

$$\mathbf{Hom}(M, N)_A=\mathbf{Hom}_A(M_A, N_A),$$

$$F^i\mathbf{Hom}(M, N)=\{f: M_A\to N_A\mid\forall n,\ f(M_{\mathbf{C}})\subset F^{n+i}N_{\mathbf{C}}\}$$

и аналогично для W.

Кольцо A, рассматриваемое как A-модуль, с фильтрациями $F^0\mathbf{C}=\mathbf{C}$ и $F^1\mathbf{C}=\{0\}$; $W_{-1}(A\otimes\mathbf{Q})=\{0\}$, $W_0(A\otimes\mathbf{Q})=A\otimes\mathbf{Q}$ образует единичный объект в этой тензорной категории.

Дуальная структура Ходжа определяется как $M^{\vee} = \mathbf{Hom}(M, A)$.

1.6. Категория вещественных структур Ходжа как категория представлений. Имеется общий принцип, согласно которому линейная категория с тензорными произведениями эквивалентна подходящей категории представлений.

В случае вещественных смешанных структур Ходжа это будет категория представлений проалгебраической группы, которую мы сейчас опишем явно.

Рассмотрим свободную нильпотентную алгебру Ли L, которая порождена над $\mathbf{C}$ образующими $T^{i,j}$ $(i, j<0)$. Введем на L градуировку, в которой $T^{i,j}$ однородны степени $i+j$. Обозначим через W_nL идеал L, порожденный элементами степени $\leqslant n$. Пусть U_n — односвязная группа Ли с алгеброй L/W_nL, $U = \varprojlim U_n$. Заставим действовать $G_m \times G_m$ на L так, что $(\lambda, \mu) T^{i,j} = \lambda^{-i}\mu^{-j}T^{i,j}$. Это действие переносится на U. Положим $G = (G_m \times G_m) \ltimes T$ (полупрямое произведение). Определим на G вещественную структуру, которая индуцирована оператором комплексного сопряжения $(\lambda, \mu) \mapsto (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ на $G_m \times G_m$ и $T^{i,j} \mapsto -T^{j,i}$ на L.

Пусть V — вещественное векторное пространство, на котором задано вещественное действие G. Иными словами, задано представление G на $V_{\mathbf{C}}$, совместимое с комплексным сопряжением. Оно определяет на $V_{\mathbf{C}}$ следующие структуры.

а) Двойную градуировку $V_{\mathbf{C}} = \oplus V^{p,q}$ — разложение по характерам $G_m \times G_m$. Из вещественности действия следует, что $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$.

б) Автоморфизм $t = \exp\left(\sum\limits_{r,s} T^{r,s}\right)$. Из вещественности следует, что $\bar{t} = t^{-1}$; кроме того,

$$(t-1)\, V^{p,q} \subset \underset{i<p,\, j<q}{\oplus} V^{i,j}.$$

Наоборот, задание таких структур, очевидно, определяет вещественное представление G (действие $T^{r,s}$ восстанавливается по t и биградуировке $V^{p,q}$). Обозначим через $\mathcal{G}_{\mathbf{R}}$ категорию таких структур.

Следующее предложение можно рассматривать как аналог для смешанных вещественных структур Ходжа характеризаций п. 1.1 б) и в) чистых структур Ходжа (аналогом характеризации а) является определение п. 1.2).

1.7. Предложение. Категория смешанных вещественных структур Ходжа эквивалентна категории конечномерных вещественных представлений группы G, описанной выше.

Набросок доказательства. Функтор $\mathscr{G}_{\mathbf{R}} \to \mathscr{H}_{\mathbf{R}}$ переводит $(V, V_{\mathbf{C}}^{p,q}, t)$ в (V, W, F), где

$$W_i = \bigoplus_{p+q \leqslant i} V_{\mathbf{C}}^{p,q}, \quad F^j = t\left(\bigoplus_{p \geqslant j} V_{\mathbf{C}}^{p,q}\right).$$

Нетрудно проверить, что он определяет эквивалентность категорий. Квазиобратный функтор ставит в соответствие $(M_{\mathbf{R}}, W, F)$ пространство $V = \mathrm{Gr}^W(M_{\mathbf{R}})$; биградуировка на $V_{\mathbf{C}}$ возникает из определения смешанной структуры Ходжа.

Для конструкции t введем следующие обозначения:

$$M_F^{p,q} = (W_{p+q} \cap F^p) \cap ((W_{p+q} \cap \overline{F}^q) + \sum_{i \geqslant 0} (W_{p+q-i} \cap \overline{F}^{q-i+1})),$$

$$M_{\overline{F}}^{p,q} = (W_{p+q} \cap \overline{F}) \cap ((W_{p+q} \cap F^p) + \sum_{i \geqslant 0} (W_{p+q-i} \cap F^{p-i+1})).$$

Можно доказать, что если $p+q=n$, то проекция $W_n \subset M_{\mathbf{R}}$ на V_W^n индуцирует изоморфизмы $M_F^{p,q} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbf{C}}^{p,q}$ и $M_{\overline{F}}^{p,q} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbf{C}}^{p,q}$. Обозначим через a_F и $a_{\overline{F}}$ суммы этих изоморфизмов. Тогда $t = a_{\overline{F}} a_F^{-1}$ есть автоморфизм $V_{\mathbf{C}}$, удовлетворяющий условию 1.6б). ■

1.8. Структуры Ходжа—Тэйта. *A-структура Ходжа—Тэйта* $A(1)$ по определению является чистой структурой Ходжа веса -2 на модуле $M_A = 2\pi i A$, сосредоточенной в бистепени $(-1, -1)$.

Положим $A(n) = A(1)^{\otimes n}$, то есть $M_A = (2\pi i)^n A$, вес равен $-2n$, бистепень $(-n, -n)$. Для любой структуры Ходжа M положим $M(n) = M \otimes A(n)$.

§ 2. Смешанные структуры Ходжа на когомологиях с постоянными коэффициентами

Первый фундаментальный результат Делиня, определившего смешанные структуры Ходжа, состоит в конструкции когомологий произвольного (возможно, особого и некомпактного) отделимого алгебраического многообразия X над $\mathbf{C}$ со значениями в $\mathscr{H}_{\mathbf{Z}}$. Мы сформулируем теорему Делиня и прокомментируем основные этапы ее доказательства.

2.1. Теорема. Для каждого n на $H^n(X, \mathbf{Z})$ определена функториальная по X смешанная структура Ходжа со следующими свойствами:

а) Если X — гладкое и полное, то эта структура чиста веса n. Фильтрация Ходжа на $H^n(X, \mathbf{C})$ определяется группами гиперкогомологий срезанного голоморфного комплекса де Рама: $\mathbf{H}^n(\Omega^i \to \Omega^{i+1} \to \ldots) = F^i H^n(X, \mathbf{C})$. Это — подгруппы $H^n(X, \mathbf{C})$, потому что спектральная последовательность $E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p) \Rightarrow$ $\Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{C})$ вырождена.

б) Изоморфизм Кюннета

$$H^{\cdot}(X \times Y, \mathbf{Q}) \simeq H^{\cdot}(X, \mathbf{Q}) \otimes H^{\cdot}(Y, \mathbf{Q})$$

является изоморфизмами смешанных структур Ходжа.

г) Умножение в когомологиях

$$H^{\cdot}(X, \mathbf{Z}) \otimes H^{\cdot}(X, \mathbf{Z}) \to H^{\cdot}(X, \mathbf{Z})$$

является морфизмом смешанных структур Ходжа. ■

Вот некоторые указания к доказательству.

2.2. Гладкие многообразия. Пусть гладкое многообразие U реализовано в виде $U = X \setminus Y$, где X — гладкое компактное комплексное многообразие, а Y — дивизор с нормальными пересечениями (то есть дивизор, локально устроенный как объединение координатных гиперплоскостей). По теории разрешения особенностей Хиронаки и теореме компактификации Нагаты, такая реализация возможна для любого гладкого алгебраического многообразия U.

Обозначим через $\Omega_X^p(\log Y)$ пучок мероморфных p-форм на X, локально порожденный голоморфными формами и формами вида dz/z, где $z=0$ — локальное уравнение некоторой ветви Y. Прямая сумма всех $\Omega_X^p(\log Y)$ образуют логарифмический комплекс де Рама $\Omega_X^{\cdot}(\log Y)$. Введение смешанной структуры Ходжа на $H^{\cdot}(U, \mathbf{C})$ можно разбить на следующие этапы.

а) Имеется канонический изоморфизм

$$H^{\cdot}(U, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^{\cdot}(X, \Omega_X^{\cdot}(\log Y))$$

(справа стоят гипергомологии). Это устанавливается с помощью спектральной последовательности Лерэ для вложения $j: U \to X$, которая дает изоморфизм

$$H^{\cdot}(U, \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^{\cdot}(X, j_* \Omega_U^{*}),$$

и проверки того, что вложение $\Omega_X^{\cdot}(\log Y) \hookrightarrow j_* \Omega_U^{*}$ является квазиизоморфизмом комплексов пучков.

б) Весовая фильтрация на $H^{\cdot}(U, \mathbf{C})$ индуцируется любой из двух фильтраций $\widetilde{W}$ или τ на $\Omega_X^{\cdot}(\log Y)$:

$$W_n H^m(X, \mathbf{C}) = H^m(X, \widetilde{W}_{n-m} \Omega_Y^{\cdot}(\log Y)) = H^m(X, \tau_{<n-m} \Omega_X^{\cdot}(\log Y)),$$

где

$\widetilde{W}_n (\Omega_X^p (\log Y)) =$ линейные комбинации с голоморфными коэффициентами форм $\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_m}{z_m}$, $m \leqslant n$, z_i — локальные уравнения Y.

$$\tau_{<n} (\Omega_X^p (\log Y)) = \begin{cases} \Omega_X^p (\log Y) & \text{при } p < n, \\ Z^n (\Omega_X^{\cdot} (\log Y)) & \text{при } p = n, \\ 0 & \text{при } p > n. \end{cases}$$

в) Фильтрация Ходжа на $H^{\bullet}(U, \mathbf{C})$ индуцируется фильтрацией

$$\sigma_{\geqslant n}(\Omega_{\bar{X}}^{p}(\log Y))=\begin{cases}\Omega_{\bar{X}}^{p}(\log Y) & \text{при } p\geqslant n,\\ 0 & \text{при } p<n.\end{cases}$$

г) Тот факт, что весовая фильтрация на $H^{\bullet}(U, \mathbf{C})$ индуцируется фильтрацией на $H^{\bullet}(U, \mathbf{Q})$, устанавливается с помощью проверки, что спектральная последовательность гиперкогомологий $\widetilde{W}$-фильтрованного комплекса $\Omega_{\bar{X}}^{\bullet}(\log Y)$ совпадает со спектральной последовательностью Лерэ для j_*, которая получается комплексификацией из некоторой последовательности $\mathbf{Q}$-пространств.

Остается проверить аксиомы структуры Ходжа и независимость от компактификации.

2.3. Многообразия с особенностями. Этот случай требует более изощренной гомологической техники: перехода к симплициальным схемам, с одной стороны, и введения технического понятия структуры Ходжа на комплексах, — с другой. Мы опишем эту технику в § 4 и § 5.

В заключение сформулируем теорему об относительных когомологиях.

2.4. Теорема. На относительных когомологиях алгебраических многообразий над $\mathbf{C}$ имеется функториальная смешанная структура Ходжа такая, что точная последовательность относительных когомологий является точной последовательностью смешанных структур Ходжа.

2.5. Структуры Ходжа на когомологиях кривой. Опишем структуру Ходжа на группе когомологий $H^1(X, \mathbf{C})$, где X — кривая.

2.5.1. *X — неособая некомпактная кривая.* Пусть $j: X\to\bar{X}$ — пополнение X, $D=\bar{X}\setminus X$. Спектральная последовательность Лерэ для j дает точную последовательность

$$0\to H^1(\bar{X}, j_*\mathbf{C}_X)\to H^1(X, \mathbf{C})\to H^0(\bar{X}, R^1j_*\mathbf{C}_X)\to H^2(\bar{X}, j_*\mathbf{C}_X),$$

где $\mathbf{C}_X$ — постоянный пучок на X со слоем $\mathbf{C}$.

Поскольку $j_*\mathbf{C}_X=\mathbf{C}_{\bar{X}}$, $R^1j_*\mathbf{C}_X=\mathbf{C}_D$, эта точная последовательность имеет вид

$$0\to H^1(\bar{X}, \mathbf{C})\xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathbf{C})\to\mathbf{C}^D\to H^2(\bar{X}, \mathbf{C}).$$

Введем весовую фильтрацию W на $H^1(X, \mathbf{C})$, полагая $W^1H^1(X, \mathbf{C})=\operatorname{Im}\alpha$, $W^2H^1(X, \mathbf{C})=H^1(X, \mathbf{C})$; фильтрация Ходжа определяется чистыми структурами Ходжа веса 1 и 2 на $H^1(\bar{X}, \mathbf{C})$ и на $\mathbf{C}^D$ ($\mathbf{C}^D$ естественно интерпретируется как группа относительных двумерных когомологий $H^2(\bar{X}, X; \mathbf{C})$, так что единственное ненулевое пространство имеет $(p, q)=(1, 1)$.

2.5.2. *X — компактная кривая.* Пусть $\pi: Y\to X$ — нормализация X. Точная последовательность пучков на X

$$0\to \mathbf{C}_X\to \pi_*\mathbf{C}_Y\to \mathscr{L}\to 0$$

(где $\mathscr{L}$ — пучок, сосредоточенный в особых точках X; размерность его слоя над $x\in X$ равна числу локальных ветвей в x) дает точную последовательность когомологий

$$H^0(X, \mathscr{L})\xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathbf{C}_X)\xrightarrow{\theta} H^1(X, \pi_*\mathbf{C}_Y)\to 0.$$

Полагаем $W^0H^1(X, \mathbf{C})=\operatorname{Im}\delta$, $W^1H^1(X, \mathbf{C})=H^1(X, \mathbf{C})$. Фильтрация Ходжа на $H^1(X, \mathbf{C})$ индуцируется чистыми структурами Ходжа веса 0 на $H^0(X, \mathscr{L})$ и веса 1 на $H^1(X, \pi_*\mathbf{C}_Y)=H^1(Y, \mathbf{C})$.

2.5.3. *Общий случай.* Обозначим через Y нормализацию X, а через $\overline{Y}$ — гладкую компактификацию Y. Аналогично предыдущему, получаем трехчленную фильтрацию в $H^1(X, \mathbf{C})$:

$$0\subset \operatorname{Im}\delta\subset\theta^{-1}(H^1(\overline{Y}, \mathbf{C}))\subset H^1(X, \mathbf{C}),$$

факторы которой имеют естественные чистые структуры Ходжа весов 0, 1, 2 соответственно.

§ 3. Структуры Ходжа на гомотопических инвариантах

3.1. Мальцевское пополнение. Пусть k — поле характеристики нуль, G — группа; $\varepsilon: k[G]\to k$ — функционал $\varepsilon(s)=1$, $s\in G$; $J=\operatorname{Ker}\varepsilon$. Обозначим через $k[G]^\wedge$ J-адическое пополнение $k[G]$. Оно наследует от $k[G]$ коумножение $\widehat{\Delta}: k[G]^\wedge\to k[G]^\wedge\otimes k[G]^\wedge$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли примитивных элементов

$$\mathfrak{g}=\{x\in\widehat{J}\mid \widehat{\Delta}(x)=1\otimes x+x\otimes 1\},$$

а через $\widehat{G}$ группу мультипликативных элементов

$$\widehat{G}=\{s\in 1+\widehat{J}\mid \widehat{\Delta}(s)=s\otimes s\}.$$

Имеются, естественные отображения

$$G\xrightarrow{\theta}\widehat{G}\underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}}\mathfrak{g}.$$

Отображение θ является универсальным гомоморфизмом G в проунипотентную проалгебраическую группу над k. Стрелки log и exp являются биекциями. Гомоморфизм θ, называемый мальцевским пополнением G, обладает следующими свойствами. Нижний центральный ряд группы $\widehat{G}$ совпадает с $\widehat{G}^r=\widehat{G}\cap(1+\widehat{J}^r)$. Пусть $G=\Gamma^{(1)}\supset\Gamma^{(2)}\supset\ldots$ — нижний центральный ряд G. Тогда θ индуцирует изоморфизм $\widehat{G}/\widehat{G}^{r+1}$ и $(G/\Gamma^{(r+1)})^\wedge$. Если G конечно порождена и $k=\mathbf{R}$, то $\widehat{G}^r/\widehat{G}^{r+1}\simeq\mathfrak{g}^r/\mathfrak{g}^{r+1}$, где $\mathfrak{g}^r=\mathfrak{g}\cap\widehat{J}^r$.

3.2. Гомотопическая алгебра Ли. Пусть (X, x) — топологическое пространство с отмеченной точкой. Положим

$\mathfrak{g}_0(X, x)$ = алгебра Ли мальцевского пополнения $\pi_1(X, x)$,

$$\mathfrak{g}_k(X, x) = \begin{cases} \pi_{k+1}(X, x)\otimes\mathbf{Q}, & \text{если } (X, x) \text{ нильпотентное пространство,} \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}_{.}(X, x) = \underset{k\geqslant 0}{\otimes}\mathfrak{g}_k(X, x).$$

Скобка Уайтхеда определяет на $\mathfrak{g}.(X, x)$ структуру $\mathbf{Z}$-градуированной супералгебры Ли ($\mathbf{Z}_2$-градуировка индуцирована $\mathbf{Z}$-градуировкой), которую мы назовем *гомотопической алгеброй Ли*.

3.3. Теорема. Пусть X — алгебраическое многообразие над $\mathbf{C}$. Тогда гомотопическая алгебра Ли $\mathfrak{g}.(X, x)$ над $\mathbf{Q}$ имеет смешанную $\mathbf{Q}$-структуру Ходжа такую, что скобка определяет смешанную $\mathbf{Q}$-структуру Ходжа и гомоморфизм Гуревича

$$\mathfrak{g}_{.}(X, x)\to H_{.}(X, x)$$

является морфизмом смешанных структур Ходжа. Все эти структуры функториальны по (X, x).

3.4. Замечания. а) Пространство $\mathfrak{g}.(X, x)$, вообще говоря, бесконечномерно. Перенося определение смешанной структуры Ходжа на этот случай, мы требуем, чтобы фильтрация W была ограничена сверху ($W_N=0$ для $N\gg 0$), но, возможно, бесконечна. Фильтрация F может быть бесконечной, но на Gr_n^W она должна индуцировать конечную фильтрацию, подчиняющуюся условию определения п. 1.1,а.

б) Не только алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(X, x)$, но и пополненное групповое кольцо $\mathbf{Q}[\pi_1(X, x)]^{\wedge}$ имеет смешанную структуру Ходжа, относительно которой умножение и коумножение являются морфизмами. Далее, $\mathbf{Z}[\pi_1(X, x)]/J^r$ имеет смешанную $\mathbf{Z}$-структуру Ходжа.

в) Аналог теоремы п. 3.3 справедлив для относительных гомотопических групп.

Пусть $f: X\to Y$ — морфизм алгебраических многообразий. Обозначим через $E_f(y)$ гомотопический слой над точкой $y\in Y$.

3.5. Теорема. Если $E_f(y)$ связен и $\pi_1(Y, y)$ унипотентно действует на $H^{\bullet}(E_f(y), \mathbf{Q})$, то на когомологиях и гомотопической алгебре Ли $E_f(y)$ имеются такие естественные структуры Ходжа, что справедливы следующие факты.

а) Естественные отображения

$$H^{\bullet}(E_f(y), \mathbf{Q})\to H^{\bullet}(X_y, \mathbf{Q}),$$

$$H^{\bullet}(E_f(y), \mathbf{Q})\otimes\mathfrak{g}_0(Y, y)\to H^{\bullet}(E_f(y), \mathbf{Q})$$

являются морфизмами смешанных структур Ходжа.

б) Если X, Y односвязны, то точная гомотопическая последовательность f является точной последовательностью смешанных структур Ходжа.

3.6. План доказательства. Пусть P_xX — пространство петель (X, x). Тогда, как известно,

$$\pi_{k+1}(X,\ x)\cong\pi_k(P_xX,\ \tilde{x}),$$
$$H^0(P_xX)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}[\pi_1(X,\ x)],\ \mathbf{Z}).$$

Далее, поскольку P_xX является H-пространством, если X односвязно, при этом предположении имеем

$$\mathrm{Hom}(\pi_{k+1}(X, x),\ \mathbf{Q})\simeq QH^k(P_xX, \mathbf{Q}),$$

где QH^k — пространство неразложимых элементов для $H^k(P_xX, \mathbf{Q})$ (фактор I/I^2, где I — идеал аугментации «значение в точке x»).

Алгебру когомологий $H^{\cdot}(P_xX, \mathbf{Q})$ можно вычислять с помощью итерированных интегралов Чена или, алгебраически, с помощью бар-конструкции, примененной к комплексу де Рама.

Ниже (пп. 3.7 и 3.8) мы опишем соответствующие конструкции.

3.7. Бар-конструкция. Пусть $A^{\cdot}$ — (супер)коммутативная дифференциальная градуированная алгебра над $\mathbf{C}$. Это означает, что алгебра A снабжена градуировкой $A=\bigoplus\limits_{i\geqslant 0} A^i$, $A^iA^j\subset A^{i+j}$, $ab=(-1)^{\deg a\ \deg b}ba$ для однородных a, b, и дифференциалом $d: A\to A$, $dA^i\subset A^{i+1}$, $d(ab)=da\cdot b+(-1)^{\deg a}a\cdot db$. Предположим также, что алгебра A пополнена, то есть задан гомоморфизм алгебр $\varepsilon: A^{\cdot}\to\mathbf{C}$, $\varepsilon(A^i)=0$ при $i>0$. Идеалом пополнения $IA^{\cdot}$ называется ядро ε. У нас $A^{\cdot}$ будет алгеброй дифференциальных форм или некоторой ее подалгеброй.

Бар-конструкцией на $A^{\cdot}$ называется комплекс $B^{\cdot}(A^{\cdot})$, ассоциированный с бикомплексом $B^{\cdot\cdot}(A^{\cdot})$, определяемым следующим образом: положим

$$B^{-s,t}=[\otimes^s IA^{\cdot}]^t$$

(элементы степени t в s-й тензорной степени). Элементы $B^{-s,t}$ традиционно обозначаются $[a_1|\ldots|a_s]$, $a_i\in IA^{\cdot}$. Дифференциалы d', d'' определяются формулой

$$d'[a_1|\ldots|a_s]=\sum_{i=1}^{s}(-1)^i[Ja_1|\ldots|Ja_{i-1}|da_i|a_{i+1}|\ldots|a_s],$$

$$d''[a_1|\ldots|a_s]=\sum(-1)^{i+1}[Ja_1|\ldots|Ja_{i-1}|Ja_i\cdot a_{i+1}|a_{i+2}|\ldots|a_s],$$

где $J: IA^{\cdot}\to IA^{\cdot}$ — линейное отображение, задаваемое на однородных элементах a формулой

$$Ja=(-1)^{\deg a}a.$$

Определим диагональ Δ и произведение $\wedge$ в $B(A^{\cdot})$ формулами

$$\Delta: B(A^{\cdot})\to B(A^{\cdot})\otimes B(A^{\cdot}),$$

$$\Delta[a_1|\ldots|a_s]=\sum_{i=0}^{s}[a_1|\ldots|a_i]\otimes[a_{i+1}|\ldots|a_s],$$

$$\wedge: B(A^{\cdot})\otimes B(A^{\cdot})\to B(A^{\cdot}),$$

$$[a_1|\ldots|a_r]\wedge[a_{r+1}|\ldots|a_{r+s}]=$$

$$=\sum_{\sigma\in\Pi_{r,s}}\varepsilon(\sigma, a_1, \ldots, a_{r+s})[a_{\sigma(1)}|\ldots|a_{\sigma(r+s)}].$$

В последней формуле суммирование ведется по всем (r,s)-перестановкам, то есть по таким элементам σ симметрической группы S_{r+s}, что $\sigma(1)<\ldots<\sigma(r)$ и $\sigma(r+1)<\ldots<\sigma(r+s)$; знак $\varepsilon(\sigma, a_1,\ldots,a_{r+s})$ определяется числом инверсий в σ между индексами i, для которых $\deg a_i$ *четна.*

Примеры:

$$a_1\otimes a_2=[a_1|a_2]+(-1)^{(\deg a_1+1)(\deg a_2+1)}[a_2|a_1],$$

$$a_1\otimes[a_2|a_3]=[a_1|a_2|a_3]+(-1)^{(\deg a_1+1)(\deg a_2+1)}[a_2|a_1|a_3]+$$

$$+(-1)^{(\deg a_1+1)(\deg a_2+\deg a_3)}[a_2|a_3|a_1].$$

3.7.1. Теорема. Бар-конструкция $B^{\cdot}(A^{\cdot})$ вместе с введенными диагональю Δ и произведением $\wedge$ является дифференциальной градуированной алгеброй Хопфа.

Отметим, что связь дифференциала $d_{B^{\cdot}(A^{\cdot})}$ с операциями в $B^{\cdot}(A^{\cdot})$ выражается тем, что Δ и $\wedge$ являются морфизмами между комплексами $B^{\cdot}(A^{\cdot})$ и $B^{\cdot}(A^{\cdot})\otimes B^{\cdot}(A^{\cdot})$ (для $\wedge$ это выражается (супер)правилом Лейбница).

3.8. Итерированные интегралы. Пусть M — гладкое многообразие, PM — пространство непрерывных кусочно-гладких путей $\gamma:[0,1]\to M$ в M. Это пространство, конечно, не является многообразием, однако на нем можно ввести многие понятия дифференциальной геометрии (оно является дифференцируемым пространством в смысле Чена [46]). В частности, отображение $f: X\to PM$ (где X — гладкое многообразие) называется гладким, если оно непрерывно и ассоциированное отображение

$$\varphi_f: [0,1]\times X\to M,\ \varphi_f(t,x)=f(x)(t)$$

обладает тем свойством, что для некоторого разбиения $0=t_0<t_1<\ldots<t_l=1$ ограничение φ_f на $[t_j, t_{j+1}]\times X$ гладко для любого j.

Дифференциальной формой w степени n на PM называется задание для каждого гладкого $f: X\to PM$ n-формы f^*w на X, причем должно выполняться условие согласованности: если $g: Y\to X$ — гладкое отображение многообразий, то

$$g^*(f^*w)=(fg)^*w$$

(где g^* — обычный обратный образ форм).

Внешнее произведение и дифференциал на пространстве $\Omega^{\cdot}(PM)$ всех форм на PM определяются естественным образом через соответствующие понятия на X.

Легко видеть, что 0-формы на PM — это гладкие функции.

Пусть теперь $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — дифференциальные формы на M. Их *итерированный интеграл* $\int \omega_1 \ldots \omega_r$ — это дифференциальная форма на PM степени $\sum(\deg \omega_j - 1)$, задаваемая для каждого $f: X \to PM$ следующим образом. Запишем форму $\varphi_f \omega_j$ на $[0, 1] \times X$ в виде

$$\varphi_f \omega_j = \omega_j'(t, x) + dt \wedge \omega_j''(t, x),$$

где ω_j', ω_j'' не содержит dt. Тогда

$$f^*\left(\int \omega_1 \ldots \omega_r\right) = \int_{0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_r \leqslant 1} \int \omega_1'(t_1, x) \wedge \ldots \wedge \omega_r'(t_r, x)\, dt_1 \ldots dt_r.$$

Обозначим через $\int \Omega^{\cdot}$ подпространство $\Omega^{\cdot}(PM)$, порожденное всеми итерированными интегралами. Несложно проверить, что $\int \Omega^{\cdot}$ инвариантно относительно внешнего произведения и дифференциала в $\Omega^{\cdot}(PM)$ и образует дифференциальную градуированную алгебру.

Пусть $x \in M$ — фиксированная точка. Ограничим каждый итерированный интеграл на подпространство $P_x M \subset PM$ и обозначим полученную алгебру через $\int_x \Omega^{\cdot}$. Композиция петель позволяет определить коумножение в $\int_x \Omega^{\cdot}$ и можно проверить, что $\int_x \Omega^{\cdot}$ превращается в дифференциальную градуированную алгебру Хопфа.

3.8.1. Теорема. Пусть $x \in M$ и пополнение $\varepsilon_x: \Omega^{\cdot} M \to \mathbf{C}$ задается формулой $\varepsilon(f) = f(x)$ для $f \in \Omega^{\cdot} M$. Пусть $B_x^{\cdot} = B_x^{\cdot}(\Omega^{\cdot} M)$ — бар-конструкция, отвечающая этому пополнению. Тогда линейное отображение

$$B_x^{\cdot} \to \int_x \Omega^{\cdot}, \quad \omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_r \mapsto \int \omega_1 \ldots \omega_r$$

является гомоморфизмом дифференциальных градуированных алгебр Хопфа, который задает изоморфизм на когомологиях.

Связь $\int_x \Omega^{\cdot}$ и $H^{\cdot}(P_x M, \mathbf{Q})$ задается тёоремой Чена — Адамса:

3.8.2. Теорема. Если M односвязно, то отображение интегрирования $H^{\cdot}\left(\int_x \Omega^{\cdot}\right) \to H^{\cdot}(P_x M, \mathbf{R})$ является изоморфизмом алгебр Хопфа.

3.9. Пример. Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие, $\bar{X}$ — его гладкое пополнение дивизором с нормальными пересечениями. Предположим, что $H^0(\bar{X}, \Omega^1_{\bar{X}})=0$. Тогда смешанная структура Ходжа на $\Pi^r_{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}[\pi_1(X, x)]/J^r$ допускает следующее описание.

а) *Кольцо над* $\mathbf{C}$. Выберем базисы $w_1, \ldots, w_m$ пространства $W=H^0(\Omega^1_{\bar{X}}(\log D))$ и $z_1, \ldots, z_n$ пространства $H^0(\Omega^2_{\bar{X}}(\log D))$. Пусть

$$w_i \wedge w_j=\sum_{k=1}^{n} a^k_{ij} z_k.$$

Пусть $\{w^j\}$ — дуальный базис пространства W^*. Рассмотрим элементы

$$R^k=\sum a^k_{ij}(w^i \otimes w^j - w^j \otimes w^i) \subset T(W^*),$$

где $T(W^*)$ — тензорная алгебра W^* над $\mathbf{C}$, и положим

$$\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}}=T(W^*)/[(R^k)+J^r],$$

где J — ядро аугментации в $T(W^*)$. Тогда существует семейство естественных изоморфизмов колец $\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}} \simeq \Pi^r_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C}$ (они определяются с помощью итерированных интегралов).

б) *Фильтрация над* $\mathbf{C}$. Имеем канонически $H^1(X, \mathbf{C}) \cong W$, поэтому W является $\mathbf{C}$-компонентой чистой структуры Ходжа веса 2 и типа (1, 1), а W^* — соответственно типа $(-1, -1)$. Соотношения R^k однородны. Поэтому на $\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}}$ имеется биградуировка, в терминах которой и определяются фильтрации над $\mathbf{C}$:

$$F^p(\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}})=\bigoplus_{u \geqslant p}(\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}})^{u,\cdot}, \quad W_l(\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}})=\bigoplus_{p+q=l}(\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}})^{p,q}.$$

в) $\mathbf{Q}$-*структура*. Она определяется образом $\mathbf{Q}[\pi_1(X, x)]$ в $\widetilde{\Pi}^r_{\mathbf{C}}$. Нетрудно проверить, что W-фильтрация определена над $\mathbf{Q}$

§ 4. Комплексы Ходжа — Делиня

4.1. Как вводить структуры Ходжа на когомологиях особых многообразий. Согласно Делиню [52], эта конструкция состоит из следующих шагов.

а) Общее (возможно, особое и некомпактное) многообразие S заменяется на его «симплициальную резольвенту» $U_{\cdot}$. Это — симплициальная схема, состоящая из гладких многообразий и снабженная аугментацией $a: U_{\cdot} \to S$, которая обладает по отношению к категории пучков абелевых групп на S такими же свойствами, как ациклическое покрытие. Сверх того, предполагается, что $U_{\cdot}$ можно вложить в гладкую собственную симплициальную схему $X_.$ так, что $X_.\setminus U_.$ будет дивизором с нормальными пересечениями.

б) Когомологии $H^{\cdot}(S, \mathbf{C})$ вычисляются с помощью обобщенной чеховской резольвенты, построенной из $H^{\cdot}(U_., \mathbf{C})$, на элементах которой структура Ходжа строится, как в § 2.

в) В качестве промежуточных объектов такой конструкции появляются комплексы модулей с фильтрацией, свойства которых обобщают свойства структур Ходжа.

В этом параграфе мы определим такие комплексы, следуя Делиню [52], и назовем их комплексами Ходжа — Делиня. В § 5 мы опишем с их помощью смешанные структуры Ходжа на когомологиях симплициальных схем. В § 6 мы дадим модифицированное определение комплексов Ходжа по Бейлинсону и опишем их связь с производной категорией структур Ходжа.

Следует предупредить читателя, что с алгебро-геометрической точки зрения эти понятия играют скорее техническую и вспомогательную роль. Мы сочли полезным их выделить, ибо они весьма характерны с категорной и гомологической точек зрения.

4.2. Фильтрованная производная категория. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Обозначим через $K^+F\mathcal{A}$ категорию ограниченных снизу фильтрованных комплексов над $\mathcal{A}$ с точностью до гомотопий, согласованных с фильтрацией. Фильтрованным квазиизоморфизмом $f: (K, F)\to(K', F')$ называется такой морфизм комплексов, согласованный с фильтрацией, что $\mathrm{Gr}_F(f)$ является квазиизоморфизмом. Через $D^+F\mathcal{A}$ обозначается категория, полученная из $K^+F\mathcal{A}$ обращением всех фильтрованных квазиизоморфизмов.

Категорией $K^+F\mathcal{A}$ удобно пользоваться для введения чистых структур Ходжа на когомологиях. Смешанные структуры Ходжа получаются аналогичным образом из категории $K^+F_2\mathcal{A}$ бифильтрованных комплексов (K, F, W) и соответствующей бифильтрованной производной категории $D^+F_2\mathcal{A}$ (бифильтрованный квазиизоморфизм f индуцирует квазиизоморфизм $\mathrm{Gr}_F\mathrm{Gr}_W(f)$).

4.3. Чистые комплексы Ходжа—Делиня. В ситуации п. 1.1 чистым A-комплексом Ходжа—Делиня веса n называется комплекс $K_A\in\mathrm{Ob}D^+(A=\mathrm{mod})$ с нётеровыми когомологиями $H^i(K_A)$ и со следующими структурами:

а) Фильтрация F на $K_A\otimes\mathbf{C}$, понимаемая как $(K_{\mathbf{C}}, F, \alpha)$, где $(K_{\mathbf{C}}, F)\in\mathrm{Ob}\ D^+F(\mathbf{C}\text{-mod})$, а $\alpha: K_{\mathbf{C}}\xrightarrow{\sim}K_A\otimes\mathbf{C}$ — квазиизоморфизм. При этом дифференциал $K_{\mathbf{C}}$ должен быть строго согласован с F.

б) Для каждого k индуцированная фильтрация на $H^k(K_A)\otimes\mathbf{C}=H^k(K_{\mathbf{C}})$ должна быть чистой структурой Ходжа веса $n+k$.

Обобщением этого понятия являются чистые A-комплексы Ходжа—Делиня веса n над топологическим пространством X. В определении выше нужно заменить A-модули и $\mathbf{C}$-модули на пучки A-модулей и $\mathbf{C}$-модулей над X и наложить следующее условие:

a′) Данные $(R\Gamma(K_A), R\Gamma((K_{\mathbf{C}}, F)), R\Gamma(\alpha)$ образуют чистый A-комплекс Ходжа веса n.

В качестве базисного примера переформулируем на этом языке теорему Ходжа. Пусть X — гладкое проективное многообразие, $K_{\mathbf{Z}}$-пучок $\mathbf{Z}$ (как комплекс, сосредоточенный в нулевом члене), $K_{\mathbf{C}}$ — голоморфный комплекс пучков де Рама, F — глупая фильтрация; $\alpha: K_{\mathbf{Z}}\otimes\mathbf{C}\to K_{\mathbf{C}}$ — квазиизоморфизм по лемме де Рама. Тогда $(K_{\mathbf{Z}}, (K_{\mathbf{C}}, F), \alpha)$ — чистый $\mathbf{Z}$-комплекс над X веса нуль.

4.4. Смешанные комплексы Ходжа—Делиня. Смешанный A-комплекс Ходжа—Делиня состоит из комплексов

$$K_A\in \mathrm{Ob}\, D^+(A\text{-mod}) \text{ с нётеровыми когомологиями},$$

$$(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W_\cdot)\in \mathrm{Ob}\, D^+F\,(A\otimes\mathbf{Q}\text{-mod}),$$

$$(K_{\mathbf{C}}, W_\cdot, F^\cdot)\in \mathrm{Ob}\, D^+F_2\,(\mathbf{C}\text{-mod})$$

и изоморфизмов

$$\alpha_{\mathbf{Q}}: K_{A\otimes\mathbf{Q}}\xrightarrow{\sim} K_A\otimes\mathbf{Q} \quad \text{в } D^+(A\otimes\mathbf{Q}\text{-mod}),$$

$$\alpha: (K_{\mathbf{C}}, W_\cdot)\xrightarrow{\sim}(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W_\cdot)\otimes\mathbf{C} \text{ в } D^+F\,(\mathbf{C}\text{-mod}).$$

Эти данные должны удовлетворять следующему условию.

Для каждого n система

$$\left(\mathrm{Gr}_n^W\left(K_{A\otimes\mathbf{Q}}\right), \left(\mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}), F\right), \mathrm{Gr}_n^W(\alpha)\right)$$

является чистым $A\otimes\mathbf{Q}$-комплексом Ходжа веса n.

На этом языке конструкция смешанной структуры Ходжа из § 2 выглядит так.

Пусть X — гладкое собственное многообразие, $Y\subset X$ — дивизор с нормальными пересечениями, $U=X\setminus Y$, $j: U\to X$ — вложение. Положим

$$K_{\mathbf{Z}} = Rj_*\mathbf{Z};$$

$$K_{\mathbf{Q}} = Rj_*\mathbf{Q}, \quad W_n(K_{\mathbf{Q}}) = \tau_{<n}(Rj_*\mathbf{Q});$$

$$K_{\mathbf{C}} = \Omega_X^\cdot(\log Y), \quad W_n = \tau_{<n}(\cdot), \quad F^p = \sigma_{>p}(\cdot).$$

О конструкции изоморфизма α было вкратце сказано в § 2. Эти данные образуют смешанный $\mathbf{Z}$-комплекс Ходжа—Делиня над X. Применив к нему функтор $R\Gamma$, мы получим смешанный $\mathbf{Z}$-комплекс Ходжа—Делиня, когомологии которого суть смешанные структуры Ходжа $H^\cdot(U, \mathbf{Z})$.

§ 5. Комплексы Ходжа — Делиня многообразий с особенностями и симплициальных многообразий

5.1. Симплициальная резольвента многообразия. Пусть S — произвольное комплексное алгебраическое многообразие. Его *симплициальной резольвентой* называется следующий набор данных:

а) Симплициальное многообразие $X.$ над $\mathbf{C}$, все объекты X_n которого являются полными и гладкими.

б) Симплициальное подмногообразие $D.\subset X.$ такое, что все $D_n\subset X_n$ являются дивизорами с нормальными пересечениями.

в) Морфизм аугментации $U.=X.\setminus D.\xrightarrow{a} S$, который превращает $U.$ в собственное гиперпокрытие S в категории топологических пространств (с обычной $\mathbf{C}$-топологией).

Формальное определение гиперпокрытия будет дано в следующем пункте. Свойства гиперпокрытия обобщают свойства обычного покрытия $S=\bigcup S_i$, если формулировать их на языке симплициального пространства $U.$, где $U_0=\bigsqcup S_i$ и $U_n=U_0\times_S\ldots\times_S U_0$ ($n+1$ раз). В частности, функтор $R\Gamma$ от пучка на S можно вычислить по $R\Gamma$ от его прообраза на U_0.

Основная алгебро-геометрическая теорема, существенно опирающаяся на разрешение особенностей (по Хиронаке), утверждает, что для любого S симплициальные резольвенты существуют; две разные симплициальные резольвенты можно накрыть с помощью третьей; и морфизм многообразий $S\to T$ можно продолжить до морфизма подходящих симплициальных резольвент. Это обеспечит существование, единственность и функториальность структур Ходжа, которые мы построим ниже.

5.2. Гиперпокрытия. а) Пусть $f: X\to Y$ — морфизм топологических пространств, $\mathcal{F}$ — пучок на X, $\mathcal{G}$ — пучок на Y. Тогда *f-морфизмами* $\mathcal{G}\to\mathcal{F}$ называются элементы множества

$$\mathrm{Hom}_f(\mathcal{G},\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(f^{*}\mathcal{G},\mathcal{F})\cong\mathrm{Hom}(\mathcal{G},f_{*}\mathcal{F}).$$

Можно определить для $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ и тройки пучков $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ композицию g-морфизма и f-морфизма, которая будет $g\circ f$-морфизмом $\mathcal{H}\to\mathcal{F}$.

б) Пусть $U.$ — симплициальное топологическое пространство. Тогда *пучок* $\mathcal{F}^{\cdot}$ на $U.$ есть семейство пучков $\mathcal{F}^n$ на U_n, связанных $U.(f)$-морфизмами $\mathcal{F}^{\cdot}(f)$ для любого неубывающего $f:[m]\to[n]$, которые подчинены условиям $\mathcal{F}^{\cdot}(f\circ g)=\mathcal{F}^{\cdot}(f)\circ\mathcal{F}^{\cdot}(g)$.

Очевидным образом определяется морфизм пучков $\mathcal{F}^{\cdot}\to\mathcal{G}^{\cdot}$.

Если $S.$ — постоянное симплициальное пространство, то есть $S_n=S$, $S(f)=\mathrm{id}$ для всех $f:[m]\to[n]$, то пучок $\mathcal{F}^{\cdot}$ на $S^{\cdot}$ — это то же, что косимплициальный пучок на S.

в) Пусть $a: U_. \to S$ — аугментированное симплициальное пространство, представленное морфизмами $a_n: U_n \to S$, которые уравнивают все $U_.(f)$. Для любого пучка $\mathcal{F}$ на S семейство $a^{\cdot}(\mathcal{F}) = \{a_n^{\cdot}(\mathcal{F})\}$ является пучком на $U_.$. Функтор $\mathcal{F} \mapsto a^{\cdot}\mathcal{F}$ имеет правый сопряженный функтор:

$$a_.: \mathcal{G}^{\cdot} \mapsto \operatorname{Ker}\left(a_0.\mathcal{G}^0 \underset{d_1^1}{\overset{d_1^0}{\rightrightarrows}} a_1.\mathcal{G}^1 \right),$$

и существует функториальный морфизм $\mathrm{Id} \to a_.a^{\cdot}$.

Аугментация a называется *морфизмом когомологического спуска*, если для любого пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ на S имеем $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} a_.a^{\cdot}\mathcal{F}$, $R^i a_.a^{\cdot}\mathcal{F} = 0$ при $i > 0$.

Непрерывное отображение $a: U \to S$ топологических пространств называется *морфизмом когомологического спуска*, если этим свойством обладает аугментация $a: U_. \to S$, где $U_n = U \underset{S}{\times} \ldots \underset{S}{\times} U$ ($n+1$ раз).

Непрерывное отображение $a: U \to S$ называется *морфизмом универсального когомологического спуска*, если для любого $U: S' \to S$ отображение $U \underset{S}{\times} S' \to S'$ является морфизмом когомологического спуска. Этим свойством обладают собственные морфизмы, и в интересующих нас приложениях их достаточно.

г) Пусть снова $a: U_. \to S$ — аугментированное симплициальное пространство. Оно называется *гиперпокрытием* S, если все канонические отображения

$$(\varphi_n)_{n+1}: U_{n+1} \to (\operatorname{cosk} \operatorname{sk}_n U_.)_{n+1}$$

являются морфизмами универсального когомологического спуска (в основных конструкциях это собственные морфизмы).

Всякое гиперпокрытие само является морфизмом когомологического спуска. В частности, для любого комплекса $K \in ObD^+(S)$ каноническое отображение

$$R\Gamma(S, K) \to R\Gamma(S, Ra_.a^{\cdot}K) \sim R\Gamma(U_., a^{\cdot}K)$$

является изоморфизмом (функтор $\Gamma(U_., \mathcal{F}^{\cdot})$ определяется как $\operatorname{Ker}(\Gamma(U_., \mathcal{F}^0) \rightrightarrows \Gamma(U_1, \mathcal{F}^1))$.

Этот изоморфизм и используется для построения комплекса Ходжа—Делиня, вычисляющего когомологии S. Дело в том, что на компонентах резольвенты U_n такие комплексы нам известны в силу § 2.

5.3. Конструкция комплекса Ходжа—Делиня В обозначениях п. 4.4 *смешанный комплекс Ходжа—Делиня*, вычисляющий когомологии S по симплициальной резольвенте $X_. \xrightarrow{j} U_. \xrightarrow{a} S'$, состоит из следующих данных:

$$K_{\mathbf{Z}} = R\Gamma(U_., \mathbf{Z}), \quad K_{\mathbf{Q}} = R\Gamma(U_., \mathbf{Q}), \quad K_{\mathbf{C}} = R\Gamma(U_., \mathbf{C}).$$

Весовая фильтрация и фильтрация Ходжа на $K_{\mathbf{C}}$ вводятся, как и прежде, с помощью отождествления

$$R\Gamma(U_., \mathbf{C}) \cong R\Gamma Rj_*\mathbf{C} \cong sR\Gamma^{\cdot}\Omega_X^{\cdot}(\log D).$$

Здесь $\Gamma^{\cdot}$ — функтор, который ставит в соответствие пучку абелевых групп $\mathcal{F}$ на $U_.$ косимплициальную группу $\{\Gamma(U_n, \mathcal{F}^n)\}$, а комплексу пучков — соответствующий комплекс косимплициальных групп. Тогда $R\Gamma^{\cdot}$ превращает комплекс пучков в комплекс косимплициальных групп; альтернированная сумма граней делает из него бикомплекс, а $sR\Gamma^{\cdot}$ — соответствующий диагональный комплекс.

Окончательно:

$$W_n[sR\Gamma^{\cdot}(\Omega_X^{\cdot}(\log D))]_m = W_n[\bigoplus_{p+q=m}(R\Gamma\Omega_{X_p}^{\cdot}(\log D_p))^q] =$$

$$= \bigoplus_{p+q=m} W_{n+p}[(R\Gamma\Omega_{X_p}^{\cdot}(\log D_p))^q],$$

$$F^n[sR\Gamma^{\cdot}(\Omega_X^{\cdot}(\log D))]_m = \bigoplus_{p+q=m} F^n[R\Gamma\Omega_{X_p}^{\cdot}(\log D_p))^q].$$

Происхождение W из фильтрации на $K_{\mathbf{Q}}$ проверяется с помощью тех же соображений, что и в гладком случае.

§ 6. Комплексы Ходжа — Бейлинсона и производные категории структур Ходжа

6.1. Производная категория. В ситуации § 1 обозначим через $\mathcal{H}$ абелеву категорию смешанных A-структур Ходжа. Обозначим через $\Gamma_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \to A\text{-mod}$ функтор $\Gamma_{\mathcal{H}}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(A(0), M)$. Нетрудно убедиться, что это лево-точный функтор и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, N) = \Gamma_{\mathcal{H}}\mathbf{Hom}(M, N)$. Мы можем определить соответствующие производные функторы

$$R\,\mathbf{Hom}: D^-(\mathcal{H})^0 \times D^+(\mathcal{H}) \to D^+(\mathcal{H}),$$

$$\overset{L}{\otimes}: D^-(\mathcal{H}) \times D^-(\mathcal{H}) \to D^-(\mathcal{H}).$$

6.2. Предложение. Пусть $M^{\cdot}$, $N^{\cdot}$ — комплексы структур Ходжа. Тогда канонические стрелки

$$(R\,\mathbf{Hom}(M^{\cdot}, N^{\cdot}))_A \to R\,\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M^{\cdot}, N^{\cdot}),$$

$$(M^{\cdot}\overset{L}{\otimes}N^{\cdot})_A \to M_A \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} N_A$$

являются (квази)изоморфизмами. В частности, для M, $N \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}$, $i > 0$ имеем

$$(R^i\,\mathbf{Hom}(M, N))_A = \mathrm{Ext}^i_{A\text{-mod}}(M_A, N_A)$$

является периодическим A-модулем.

6.3. Метод вычисления $R\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}$. Рассмотрим диаграмму комплексов A-модулей вида:

$$
\mathrm{D}:\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & B_1 & & \cdots & & B_n & \\
A_1 \arrow[ur, "f_1"] & & A_2 \arrow[ul, "g_1"'] \arrow[ur, "f_2"] & \cdots & A_n \arrow[ur, "f_n"] & & A_{n+1} \arrow[ul, "g_n"']
\end{tikzcd}
$$

Положим

$$f=\sum f_i-\sum g_i:\oplus A_i=\widetilde{\Gamma}^0(D)\to\oplus B_i=\widetilde{\Gamma}^1(D).$$

Положим далее

$$\Gamma(D)=\mathrm{Ker}\,f,\quad \Gamma^1(D)=\mathrm{Coker}\,f,\quad \widetilde{\Gamma}(f)=\mathrm{Cone}(f).$$

Пусть $M^{\cdot}$ — некоторый комплекс структур Ходжа. Он порождает диаграмму описанного вида:

$$
\mathrm{D}_{\mathscr{H}}(M^{\cdot}):\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M^{\cdot}_{\mathbf{Q}} & & W_{\mathbf{C},0}(M^{\cdot}) & \\
M^{\cdot}_{A} \arrow[ur] & & W_{\mathbf{Q},0}(M^{\cdot}) \arrow[ul] \arrow[ur] & & (F^0\cap W_{\mathbf{C},0})(M^{\cdot}) \arrow[ul]
\end{tikzcd} .
$$

Положим $\widetilde{\Gamma}_{\mathscr{H}}(M^{\cdot})=\widetilde{\Gamma}(D_{\mathscr{H}}(M^{\cdot}))$, $\Gamma_{\mathscr{H}}(M^{\cdot})=\Gamma(D_{\mathscr{H}}(M^{\cdot}))$ и т. п. Новое определение $\Gamma_{\mathscr{H}}(M^{\cdot})$ совпадает со старым, когда $M^{\cdot}$ есть объект. Функтор $\widetilde{\Gamma}_{\mathscr{H}}(M^{\cdot})$ переводит квазиизоморфизмы в квазиизоморфизмы и потому индуцирует соответствующий функтор на производных категориях.

6.3.1. Предложение. а) Каноническая стрелка $R\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(M^{\cdot},N^{\cdot})\to\widetilde{\Gamma}_{\mathscr{H}}R\,\mathbf{Hom}^{\cdot}(M^{\cdot},N^{\cdot})$ является изоморфизмом.

б) Для любых структур Ходжа M, N и $i>1$ имеем $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{H}}(M,N)=\mathrm{Ext}^i_A(M_A,N_A)$. В частности, если A — любое регулярное кольцо размерности $\leqslant 1$ (например, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{R}$), то $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{H}}=0$ при $i>1$, так что любой комплекс $M^{\cdot}$ квазиизоморфен $\oplus H^i(M^{\cdot})[-i]$ посредством квазиизоморфизма, индуцирующего тождественный морфизм на когомологиях.

6.4. Комплексы Ходжа—Бейлинсона. *Комплексом Ходжа—Бейлинсона* называется некоторое обобщение диаграммы $D_{\mathscr{H}}(M^{\cdot})$, а именно, диаграмма вида:

$$
\mathscr{M}:\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \widetilde{M}^{\cdot}_{\mathbf{Q}} & & (\widetilde{M}^{\cdot}_{\mathbf{C}},\widetilde{W}_{\mathbf{C}\cdot}) & \\
M^{\cdot}_{A} \arrow[ur, "\alpha_1"] & & (M^{\cdot}_{\mathbf{Q}},W_{\mathbf{Q}\cdot}) \arrow[ul, "\alpha_2"'] \arrow[ur, "\alpha_3"] & & (M^{\cdot}_{\mathbf{C}},W_{\mathbf{C}\cdot},F^{\cdot}) \arrow[ul, "\alpha_4"']
\end{tikzcd} .
$$

В этой диаграмме $M_A^{\cdot}$, $\widetilde{M}_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$ и т. п. суть комплексы A-модулей, $\mathbf{Q}$-модулей и т. п.; W и F — их фильтрации, стрелки

$$\alpha_{1,\mathbf{Q}}: M_A^{\cdot} \underset{A}{\otimes} \mathbf{Q} \to \widetilde{M}_{\mathbf{Q}}^{\cdot}, \quad \alpha_2: M_{\mathbf{Q}}^{\cdot} \to \widetilde{M}_{\mathbf{Q}}^{\cdot},$$

$$\alpha_{3,\mathbf{C}}: (M_{\mathbf{Q}}^{\cdot}, W_{\mathbf{Q}}.) \underset{A}{\otimes} \mathbf{C} \to (\widetilde{M}_{\mathbf{C}}^{\cdot}, \widetilde{W}_{\mathbf{C}}.),$$

$$\alpha_4: (M_{\mathbf{C}}, W_{\mathbf{C}}.) \to (\widetilde{M}_{\mathbf{C}}, \widetilde{W}_{\mathbf{C}}.)$$

являются (фильтрованными) квазиизоморфизмами. Далее, должны быть выполнены следующие условия.

а) M_A имеет нётеровы когомологии.

б) Для каждого $n \in \mathbf{Z}$ дифференциал фильтрованного комплекса $(\mathrm{Gr}_n^W(M_{\mathbf{C}}^{\cdot}), \mathrm{Gr}_n^W F^{\cdot})$ строго совместим с фильтрацией.

в) Эта фильтрация спускается на $H^{\cdot}(\mathrm{Gr}_n^W M_{\mathbf{Q}}^{\cdot})$ и определяет на этих когомологиях чистую $A \otimes \mathbf{Q}$-структуру Ходжа веса n.

Можно проверить, что при этих условиях спектральные последовательности комплексов $M_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$ и $M_{\mathbf{C}}^{\cdot}$ по отношению к фильтрациям W и F вырождаются в члене E_1, что позволяет определить на $H^{\cdot}(M_A^{\cdot})$ A-структуру Ходжа. Обозначим ее через $\mathbf{H}^{\cdot}(M^{\cdot})$.

Морфизм $f: M_1^{\cdot} \to M_2^{\cdot}$ комплексов Ходжа — Бейлинсона определяется как морфизм соответствующих диаграмм. Можно определить гомотопию и конус в этой категории. Пусть $K_{\mathcal{H}}^*$ (где $* = b, +, -, \varnothing$) — соответствующая триангулированная категория. Имеется функтор когомологий $\mathbf{H}: K_{\mathcal{H}}^* \to \mathcal{H}$, и морфизм в $K_{\mathcal{H}}^*$ называется *квазиизоморфизмом*, если он индуцирует изоморфизм на всех $\mathbf{H}^i$. Пусть $D_{\mathcal{H}}^* = K_{\mathcal{H}}^*[Qis^{-1}]$.

Для любого комплекса структур Ходжа $M^{\cdot}$ диаграмма $D_{\mathcal{H}}(M^{\cdot})$ является комплексом Ходжа — Бейлинсона. Это определяет функтор $D^*(\mathcal{H}) \to D_{\mathcal{H}}^*$.

6.4.1. Теорема. Функтор $D^b(\mathcal{H}) \to D_{\mathcal{H}}^b$ является эквивалентностью категорий.

Из этой теоремы и конструкций Делиня вытекает следующий результат.

6.5. Теорема. Существует функтор $R\Gamma(\cdot, A)$ из категории алгебраических многообразий над $\mathbf{C}$ в производную категорию $D^b(\mathcal{H}_A)$ такой, что $R\Gamma(X, \overline{A)}_A$ есть комплекс сингулярных коцепей с коэффициентами в постоянном пучке A_X. ■

Прямая конструкция этого функтора ставит в соответствие многообразию X подходящий комплекс Ходжа — Бейлинсона как объект $D_{\mathcal{H}}^b$.

§ 7. Вариации структур Ходжа

7.1. Основные задачи. Пусть $f: X \to S$ — морфизм алгебраических многообразий, который естественно рассматривать как семейство слоев $X_s = f^{-1}(s)$, параметризованное точками $s \in S$ (на f могут быть наложены разные условия регулярности). Тогда возникает семейство структур Ходжа $H^{\cdot}(X_s)$, называемое *геометрическим* (или геометрически реализуемым). Уже в первые годы развития теории были установлены основные свойства таких семейств. Отметим среди них следующие (см. обзор Гриффитса [72]).

а) *Теорема Гриффитса о трансверсальности*: ковариантная производная относительно канонической плоской связности на $H^{\cdot}(X_s)$ вдоль голоморфного векторного поля переводит F^p в F^{p-1}.

б) *Теорема о монодромии*: пусть семейство $f: X \to S$ вкладывается в семейство $\overline{f}: \overline{X} \to \overline{S}$, где $\overline{X} \setminus X$ и $\overline{S} \setminus S$ — дивизоры с нормальным пересечением. Тогда оператор монодромии T при обходе вокруг одной из ветвей S квазиунипотентен: $(T^r - 1)^q = 0$ для подходящих r и q.

в) *Теорема о полупростоте глобального действия* $\pi_1(S, s_0)$ *на* $H^*(X_{s_0}, \mathbf{C})$.

г) *Теорема о регулярности*: особые точки канонической связности над одномерной базой регулярны в смысле Фукса.

д) *SL_2-Теорема Шмидта.* Эта теорема дает точные сведения об асимптотическом поведении структур Ходжа при приближении к особой точке.

В дальнейшем было предложено несколько уточнений понятия «вариация структур Ходжа». Часть информации о геометрических структурах Ходжа при этом включалась в определение. Одна из целей теории — найти такое определение вариации структур Ходжа, которое было бы замкнуто относительно всех естественных геометрических и когомологических конструкций; в частности, когомологии с коэффициентами в структурах Ходжа сами должны обладать естественными структурами Ходжа.

Не претендуя на полноту, мы приведем несколько современных результатов о вариациях структур Ходжа.

7.2. Определение. *Вариацией* (чистой) *A-структуры Ходжа* веса n над комплексным многообразием S называется следующий набор данных.

а) Локально постоянный пучок нётеровых A-модулей $\mathcal{M}_A$ над S.

б) Конечная убывающая фильтрация локально свободного пучка $\mathcal{M} = \mathcal{O}_S \otimes_A \mathcal{M}_A$, члены которой $F^p\mathcal{M}$ являются локально свободными локально прямыми подпучками в $\mathcal{M}$, такая, что на слоях $\mathscr{M}(s)$ над всеми точками $s \in S$ эта фильтрация индуцирует чистую структуру Ходжа веса n.

в) F^p должна также удовлетворять следующему условию трансверсальности: пусть ∇ — голоморфная связность на $\mathscr{M}$, относительно которой $\mathscr{M}_A$ горизонтален. Тогда $\nabla F^p \mathscr{M} \subset \Omega_S^1 \underset{\mathscr{O}_S}{\otimes} F^{p-1}\mathscr{M}$ для всех p.

7.3. Определение. *Поляризацией* вариации чистой A-структуры Ходжа веса n над S, определенной в п. 7.2, называется невырожденное плоское билинейное спаривание $\beta: \mathscr{M}_A \times \mathscr{M}_A \to A$, которое невырождено, $(-1)^n$ — симметрично и для которого эрмитова форма $\beta_s(C_s m, \bar{n})$ положительно определена, где C_s — умножение на i^{p-q} на $\mathscr{M}^{p,q}(s)$.

Вариация называется *поляризуемой*, если она допускает поляризацию. В геометрической ситуации поляризации происходят из кэлеровой метрики и примитивного разложения.

7.4. Определение. *Вариацией смешанной A-структуры Ходжа* над комплексным многообразием S называется следующий набор данных.

а) Локально постоянный пучок нетеровых A-модулей $\mathscr{M}_A$ над S.

б) Фильтрация W пучка $\mathscr{M}_Q = Q \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}_A$ локально постоянными подпучками.

в) Конечная убывающая фильтрация F локально свободного пучка $\mathscr{M} = \mathscr{O}_S \underset{A}{\otimes} \mathscr{M}_A$, члены которой являются локально свободными локально прямыми подпучками в $\mathscr{M}$ и которая удовлетворяет условию трансверсальности, как в п. 7.2 в).

Эти данные должны определять на каждом слое смешанную структуру Ходжа. Тогда $\mathrm{Gr}_m^W \mathscr{M}_A$ будет вариацией чистой структуры Ходжа для всех m.

Вариация смешанной структуры Ходжа называется *поляризуемой*, если все вариации $\mathrm{Gr}_m^W \mathscr{M}_A$ поляризуемы.

7.5. Пример. Пусть $f: X \to S$ — топологически локально постоянное семейство алгебраических многообразий. Тогда пучок $\mathscr{M}_Z = R^q f_* Z$ канонически является вариацией структуры Ходжа.

7.6. Пример. Пусть S — произвольное гладкое алгебраическое многообразие. Рассмотрим на нем локальную систему Π^r со слоем $Z[\pi_1(S, s)]/J^r$ в точке s. Согласно § 3, она обладает послойной смешанной Z-структурой Ходжа. Существует единственная вариация структур Ходжа, индуцирующая эти послойные стрктуры. Эта вариация называется тавтологической.

Важность этого примера связана с тем, что его обобщение позволяет дать теоретико-представленческое описание важной подкатегории вариаций структур Ходжа.

С этой целью заметим сначала, что локально постоянный пучок $\mathcal{M}_A$ на связной базе S однозначно определяется представлением группы $\pi_1(S, s)$ на слое $\mathcal{M}_{A,s}$ (где s — любая фиксированная точка S).

7.7. Определение. Вариация структуры Ходжа $(\mathcal{M}_A, F, W)$ называется *унипотентной*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

а) Представление $\pi_1(S, s)$ на $\mathcal{M}_{A,s}$ унипотентно.

б) Это представление индуцировано некоторым представлением $\mathbf{Z}[\pi_1(S, s)]/J^r$ (мы говорим, что индекс унипотентности $\leqslant r-1$).

в) Вариации Gr_m^W постоянны для всех m.

7.8. Поведение на бесконечности. Пусть $S=\bar{S}\setminus D$, где $\bar{S}$ компактно, D — дивизор с нормальными пересечениями, N — локально постоянный пучок $\mathbf{C}$-линейных пространств на S, $\mathcal{N}=\mathcal{O}_S \underset{\mathbf{C}}{\otimes} N$. Определим по Делиню каноническое продолжение пучка $\tilde{\mathcal{N}}$ как подпучок $j_*(\mathcal{N})$, где $j: S\to\bar{S}$. Выберем окрестность точки D вида $(\Delta^*)^r\times\Delta^{n-r}$, где Δ — единичный диск, $\Delta^*=\Delta\setminus\{0\}$. Пусть $(z_1, \ldots, z_r)$ — координаты на $(\Delta^*)^r$, $N_i = r^{-1}\log T_i^r$, где T_i — монодромия обхода в $\overset{*}{\Delta_i}$, унипотентно. Пусть $z_j=\exp(2\pi i t_j)$, $\mathrm{Im}\, t_j>0$. В качестве образующих $\tilde{\mathcal{N}}$ мы берем сечения $\tilde{n}=\exp\left(-\sum t_j N_j\right) n$, где n пробегает (многозначные) локальные сечения $\tilde{\mathcal{N}}$.

7.9. Определение. Унипотентная вариация структуры Ходжа $(\mathcal{M}_A, F, W)$ называется *хорошей*, если

а) члены фильтрации Ходжа $F^p\mathcal{M}$ продолжаются до подпучков $\tilde{F}^p=F^p\tilde{\mathcal{M}}^p$ канонического продолжения таким образом, что пучки $\mathrm{Gr}^W\mathrm{Gr}_F$ локально свободны.

б) Любой нильпотентный логарифм N_i локального оператора монодромии удовлетворяет условию $N_i W_m \subset W_{m-2}$ для всех m.

7.10. Ходжевы представления π_1. Унипотентное представление $\pi_1(S, s)$ на A-модуле M_A, снабженном структурой Ходжа, называется *ходжевым*, если соответствующее отображение

$$A[\pi_1(S, s)]/J^r \to \underline{\mathrm{End}}\, M_A$$

является морфизмом структур Ходжа.

7.11. Теорема. Если $(\mathcal{M}_A, F, W)$ — хорошая унипотентная вариация структуры Ходжа, то представление $\pi_1(S, s)$ на ее слое ходжево.

7.12. Теорема. Функтор монодромии определяет эквивалентность категорий:

$$\left\{\begin{matrix}\text{хорошие унипотентные вариации}\\ \text{смешанной структуры Ходжа}\\ \text{индекса унипотентности } \leqslant r-1\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{ходжевы представления}\\ \pi_1(S, s) \text{ индекса}\\ \text{унипотентности } \leqslant r-1\end{matrix}\right\}$$

7.13. Свойство продолжения вариаций. Условия п. 7.9 на вариацию структур Ходжа могут быть сформулированы без требования унипотентности. Назовем вариацию *преддопустимой,* если она удовлетворяет этому условию и вдобавок является поляризуемой. Назовем вариацию *допустимой,* если для любого морфизма единичного диска D в S индуцированная вариация структур Ходжа на D преддопустима.

Кашивара [99] доказал, что если вариация структуры Ходжа допустима на дополнении к множеству коразмерности два, то она допустима всюду, при условии, что база допускает компактификацию дивизором с нормальными пересечениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Классическая теория Ходжа хорошо изложена в обзорах [48], [72], [74]. Теория смешанных структур Ходжа была развита Делинем [52], [53]; см. также его доклады [51], [56]. Применение смешанных структур Ходжа к исследованию особенностей дифференцируемых многообразий и поведения осциллирующих интегралов см. [5], [6]. Теоремы типа Торелли в разных контекстах изучались во многих работах по алгебраической геометрии; см. об этом, например, [139], а также другие тома этой серии. Обзор результатов о характеризации алгебраических классов когомологий (гипотезы Ходжа) содержится в [134]; см. также [79]. Алгеброгеометрические аспекты теории вариаций структур Ходжа см. в серии работ [36], а также в [129]. Из числа вопросов, не затрагиваемых в основном тексте, отметим также работы по p-адическим структурам Ходжа [28], [60], [62], [138].

Перейдем к содержанию отдельных параграфов этой главы. Категорный подход к теории смешанных структур Ходжа и, в частности, теорема п. 1.4, содержатся в [52]. Относительно предложения п. 1.7 см. приложение Делиня к статье [43]. Теорема п. 2.1 доказана в [52]; относительно примера п. 2.5 см. [53, п. 10.3]. Теория смешанных структур Ходжа на гомотопических инвариантах алгебраических многообразий развита Морганом [119] и продолжена, в частности, Хайном [81], [82]. Наше изложение в § 3 следует, в основном, работе [81], где можно найти доказательства теорем пп. 3.3, 3.5, 3.7.1, 3.8.1, 3.8.2. Теория итерированных интегралов была развита Ченом [46] и, независимо, А. Н. Паршиным [11]. Содержание §§ 4, 5 следует работе Делиня [53], содержание § 6 — работе А. А. Бейлинсона [21]. Современный подход к вариациям структур Ходжа см. [42], [44], [83], [98], [99].

Глава 7

ПРЕВРАТНЫЕ ПУЧКИ

§ 1. Превратные пучки

1.1. Стратификации. Пусть X — топологическое пространство. Конечное разбиение X на непустые локально замкнутые подмножества (страты) называется *стратификацией,* если замыкание каждого страта является объединением стратов.

Комплексное аналитическое или алгебраическое пространство X допускает стратификацию, все страты которой являются неособыми многообразиями и которые удовлетворяют условию эквисингулярности: для любых двух точек p, q одного страта имеется диффеоморфизм X, переводящий p в q и каждый страт в себя.

Пусть $\mathcal{S}$ — некоторая стратификация. Превратностью называется функция $p: \mathcal{S} \to \mathbf{Z}$.

1.2. ***t*-структура, определенная по p и $\mathcal{S}$.** Пусть $D(X)$ — производная категория пучков абелевых групп на X. Для каждого страта $S \in \mathcal{S}$ обозначим через i_S его вложение в X.

Положим

$^pD^{\leqslant 0}(X)$ = полная подкатегория комплексов $K \in Ob\, D(X)$ со свойством $H^n i_S^*(K) = 0$ при $n > p(S)$ для всех S;

(1) $^pD^{\geqslant 0}(X)$ = полная подкатегория комплексов $K \in Ob\, D(X)$ со свойством $H^n i_S^!(K) = 0$ при $n < p(S)$ для всех S.

1.2.1. Предложение. *$(^pD^{\leqslant 0}(X), {}^pD^{\geqslant 0}(X))$ есть t-структура на $D(X)$, индуцирующая t-структуры на $D^{\pm}(X)$ и $D^b(X)$.*

Доказательство проводится индукцией по числу стратов с использованием теоремы о склейке (см. гл. 5, п. 3.7.3).

1.3. Определение. Сердцевина описанной t-структуры, то есть категория $\mathcal{M}(p, X) = {}^pD^{\leqslant 0}(X) \cap {}^pD^{\geqslant 0}(X)$, называется категорией *t-превратных пучков.*

Из общей теории сердцевин (теорема гл. 5, п. 3.4) ясно, что это — абелева категория. Вместо пучков абелевых групп можно рассмотреть категорию пучков $\mathcal{O}$-модулей на X, где $\mathcal{O}$ — фиксированный пучок колец; соответствующие p-превратные пучки обозначаются $\mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$ или просто $\mathcal{M}(p, X)$.

При $p=0$ мы получаем обычную категорию пучков.

1.4. Пример. Пусть X — n-мерное комплексное пространство со стратификацией комплексными подмногообразиями S. Пусть $C_\cdot(X)$ — комплекс кусочно-линейных цепей (в какой-нибудь кусочно-линейной структуре X) с коэффициентами в поле. Обозначим через $IC_\cdot(X)$ подкомплекс $C_\cdot(X)$, состоящий из цепей c со следующими условиями

$$\dim(\operatorname{supp} c \cap S) < \dim \operatorname{supp} c - \operatorname{codim}_{\mathbf{C}} S,$$
$$\dim(\operatorname{supp} \partial c \cap S) < \dim \operatorname{supp} c - 1 - \operatorname{codim}_{\mathbf{C}} S$$

для всех стратов S коразмерности >0.

Определим аналогично $IC_\cdot(U)$ для открытых подмножеств $U \subset X$ с индуцированной стратификацией и обозначим через $IC_\cdot^{\mathrm{cl}}(U)$ подгруппу цепей с замкнутым носителем.

Положим $\mathbf{IC}^i(U) = [IC_{2n-i}^{\mathrm{cl}}(U)]^*$. Тогда $\mathbf{IC}^\cdot$ — p-превратный пучок в категории $\mathcal{M}(p_{1/2}, X, A)$, где A — постоянный пучок, отвечающий группе коэффициентов, а автодвойственная превратность $p_{1/2}$ задается формулой $p_{1/2}(S) = -\dim_{\mathbf{C}} S$.

Интуитивно говоря, превратный пучок $IC^{\cdot}$ следует рассматривать как правильный аналог постоянного пучка A на особых многообразиях. Можно показать, что как объект производной категории он получается с помощью некоторой естественной конструкции продолжения постоянного пучка с открытого плотного страта.

Эту конструкцию можно применять также к непостоянным локальным системам и любой превратности. Опишем ее подробнее.

1.5. Конструкция продолжения. Будем считать, что превратность p монотонна: если $S\subset\bar{T}$, то $p(S)\geqslant p(T)$. Положим $F_n=\bigcup\limits_{p(S)\geqslant n} S$, $U_n=\bigcup\limits_{p(S)\leqslant n} S$, $j_n:U_{n-1}\hookrightarrow U_n$. Очевидно, U_n открыты, F_n замкнуты.

Пусть A — p-превратный пучок на U_k, $a\geqslant k$ — такое целое число, что $p(S)\leqslant a$ для всех S, и $j=j_k$.

$$j_{!*}A=\tau_{\leqslant a-1}Rj_{a\cdot}\ldots\tau_{\leqslant k}Rj_{k+1,\cdot}(A),$$

где $\tau_{\leqslant l}$ — обычный срезающий функтор в $D(X)$ (см. гл. 4, п. 2.10), $Rj_{\cdot}$ — функтор прямого образа (см. гл. 4, п. 5.2).

1.5.1. Предложение. Продолжение $j_{!*}A$ p-превратного пучка A с U_k на X является единственным продолжением A до объекта $P\in \mathrm{Ob}D(X)$ со следующими свойствами:

$$H^n i_S^{\cdot}(P)=0 \text{ при } n\geqslant p(S),$$

$$H^n i_S^{!}(p)=0 \text{ при } n\leqslant p(S)$$

для всех $S\subset X\setminus U_k$.

Более общо, теорема существования и единственности продолжения с такими свойствами верна в следующей ситуации: вместо U_k можно взять любое открытое объединение стратов, а на p можно не налагать условие монотонности. Однако изложенная выше прямая конструкция может оказаться неприменимой.

Чтобы описать ее в общем виде, введем функторы прямого образа ${}^pj_{\cdot}$, ${}^pj_{!}$, связанные с данной превратностью p.

Обозначим через U произвольное локально замкнутое объединение стратов и через $j: U\to X$ вложение. Тогда определены функторы $Rj_{\cdot}$, $j_!$ из $D(U)$ в $D(X)$ (см. гл. 5, п. 3.7.1). Можно проверить, что относительно t-структуры, описанной в п. 1.2, $Rj_{\cdot}$ точен слева, а $j_!$ точен справа. Это означает, что для $P\in\mathcal{M}(p, U)$ имеем: $Rj_{\cdot}(P)$ лежит в ${}^pD^{\geqslant 0}(X)$, $j_!(P)$ лежит в ${}^pD^{\leqslant 0}(X)$. Определим функторы ${}^pj_{\cdot}$ и ${}^pj_!$: $\mathcal{M}(p, U)\to\mathcal{M}(p, X)$

условиями

$$^{p}j_{.}(P)={}^{p}\tau_{\leqslant 0}Rj_{.}(P),$$

$$^{p}j_{!}(P)={}^{p}\tau_{\geqslant 0}j_{!}(P),$$

где $^{p}\tau$ означает срезающий функтор относительно t-структуры 1.2 (см. лемму в гл. 5, п. 3.4.1).

Естественный морфизм функторов $j_{!}\to j_{.}$ продолжается с пучков на производные категории и затем до $^{p}j_{!}\to {}^{p}j_{.}$. Окончательно, положим

$$j_{!*}(P)=\operatorname{Im}({}^{p}j_{!}(P)\to {}^{p}j_{.}(P)).$$

1.5.2. Предложение. Если $B\in\mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$, где U — открытое объединение стратов, то $P=j_{!*}(P)$ является единственным продолжением B в $D(X, \mathcal{O})$ со свойством, указанным в предложении п. 1.5.1.

1.6. Конструктивные комплексы. Начиная с этого места, мы будем считать выполненными следующие условия.

а) O есть постоянный пучок, слой которого — фиксированное нетерово кольцо R (чаще всего $\mathbf{Z}$ или поле).

б) X допускает локально конечную триангуляцию; каждый страт стратификации $\mathcal{S}$ является равноразмерным топологическим многообразием и получается объединением открытых симплексов, причем $\dim S<\dim \overline{T}$ при $S\subset\overline{T}$, $S\neq T$.

в) Для любого S функтор $i_{S^{\cdot}}$ имеет конечную когомологическую размерность.

Стандартным примером является статификация Уитни вещественного алгебраического многообразия, и, в частности, стратификация комплексного многообразия неособыми комплексными подмногообразиями (в этом важном случае все страты четномерны).

1.6.1. Определение. а) Пучок $\mathcal{F}$ на X называется *конструктивным* относительно $\mathcal{S}$, если для любого $S\in\mathcal{S}$ пучок $i_{S}^{\cdot}\mathcal{F}$ локально постоянен на S.

б) Комплекс пучков $\mathcal{F}^{\cdot}$ называется *когомологически конструктивным*, если все $H^{i}(\mathcal{F}^{\cdot})$ конструктивны и имеют конечно порожденные (над R) слои.

Обозначим через $D_{\mathcal{S}}(X, R)$ полную подкатегорию категории $D(\mathcal{S}(R\text{-mod}))$, состоящую из когомологически конструктивных относительно $\mathcal{S}$ комплексов пучков R-модулей, и через $D_{c}(X, R)$ объединение $D_{\mathcal{S}}(X, R)$ для всех $\mathcal{S}$, удовлетворяющих условиям а)—в) выше. Легко проверить, что $D_{\mathcal{S}}(X, R)$, $D_{c}(X, R)$ — триангулированные подкатегории $D(\mathcal{S}(R\text{-mod}))$.

Отметим, что при выполнении условий б), в) для любого страта $S\in\mathcal{S}$ и любого локально постоянного пучка $\mathcal{F}$ на S пучок $i_{S.}(\mathcal{F})$ конструктивен относительно $\mathcal{S}$.

Основная причина, по которой нужно вводить категорию $D_c(X, R)$, заключается в следующем предложении.

1.6.2. Предложение. а) Дуализирующий комплекс $\mathbf{D}_X$ (см. гл. 4, п. 5.16) лежит в $D_c(X, R)$ (в действительности, в $D_{\mathcal{S}}(X, R)$ для любой стратификации, удовлетворяющей б), в)).

б) Двойственность Пункаре—Вердье. Пусть $R=k$ — поле. Функтор $\mathfrak{D}_X F^{\cdot}=R\mathcal{H}om(F^{\cdot}, \mathbf{D}_X)$ задает эквивалентность категорий $D_c(X, k)\to D_c(X, k)^0$.

1.7. Двойственность для превратных пучков. Пусть p — превратность на стратификации $\mathcal{S}$ пространства X. Определим двойственную превратность p^* формулой

$$p^*(S) = -p(S)-\dim S.$$

Если все страты четномерны, *автодвойственная* превратность $p_{1/2}$ задается формулой

$$p_{1/2}(S) = -(1/2)\dim S.$$

Используя формулы из гл. 4, п. 5.18ж, условия (1), (2), определяющие p-превратные пучки, можно переписать следующим образом: для любого страта $S\in\mathcal{S}$ имеем

$$H^n i_S^{\cdot}(\mathcal{F}^{\cdot})=0 \text{ при } i>p(S), \tag{3}$$

$$H^n i_S^{\bullet}(\mathfrak{D}_X\mathcal{F}^{\cdot})=0 \text{ при } i>p^*(S). \tag{4}$$

Пара условий (3), (4), очевидно, двойственна друг другу. Поэтому функтор двойственности $\mathfrak{D}_X$ переводит $\mathcal{M}(p, X)$ в $\mathcal{M}(p^*, X)^0$. Кроме того, налагая на $\mathcal{F}^0$ требование самодвойственности относительно $\mathfrak{D}_X$, можно, очевидно, ограничиться лишь одним из условий (3) или (4). Поэтому предложение п. 1.5.2 можно переписать следующим образом.

1.7.1. Предложение. Пусть все страты $S\in\mathcal{S}$ имеют четную размерность и $p=p_{1/2}$ — автодвойственная превратность. Пусть $j:U\to X$ — вложение объединения стратов и $\mathcal{A}$ — p-превратный самодвойственный (относительно $\mathfrak{D}_U$) пучок на U. Тогда $j_{!*}\mathcal{A}$ — единственное самодвойственное (относительно $\mathfrak{D}_X$) продолжение P комплекса $\mathcal{A}$ в $D_c(X, k)$, такое, что для любого страта $S\subset X\setminus U$ имеем $H^i(i_S^{\cdot}P)=0$ при $i>p_{1/2}(S)= -(1/2)\dim S$. ■

1.8. Измельчение стратификации. Пусть стратификация $\mathcal{T}$ является измельчением стратификации $\mathcal{S}$ (то есть каждый страт $\mathcal{S}$ есть объединение нескольких стратов $\mathcal{T}$), так что имеется вложение категорий $I:D_{\mathcal{S}}(X, R)\to D_{\mathcal{T}}(X, R)$. Пусть p, q — превратности на $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, удовлетворяющие условию

$$p(S)\leqslant q(T)\leqslant p(S)+\dim S-\dim T$$

для любых $S\in\mathcal{S}$, $T\in\mathcal{T}$ с $T\subset S$.

1.8.1. Предложение. В этих условиях t-структура превратности q на $D_{\mathcal{T}}(X, R)$ индуцирует t-структуру превратности р на $D_{\mathcal{S}}(X, R)$ (при вложении категорий I). В частности, каждый p-превратный пучок является q-превратным, I индуцирует точное вложение абелевых категорий $I_{p,q}: \mathcal{M}(p, X) \to \mathcal{M}(q, X)$, и для любого вложения $j: U \to X$ объединения стратов $\mathcal{S}$ ограничения функторов ${}^q j_{\cdot}$, ${}^q j_!$, ${}^q j^{\cdot}$, ${}^q j^!$, ${}^q j_{*!}$ на $\mathcal{M}(p, U)$ и $\mathcal{M}(p, X)$ совпадают с соответствующими функторами, имеющими индекс p. ■

1.9. Комплексные многообразия. Рассмотрим случай, когда X — комплексное многообразие, $\mathcal{S}$ — стратификация X неособыми комплексными подмногообразиями, и превратность p такова, что $p(S)$ зависит лишь от размерности $S \in \mathcal{S}$, (то есть $p(S) = p(\dim_{\mathbf{R}} S) = p(2 \dim_{\mathbf{C}} S)$). Будем считать также, что $p(n)$ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant p(n) - p(m) \leqslant m - n \quad \text{при} \quad n \leqslant m. \tag{5}$$

В этом случае, согласно предложению п. 1.8.1, измельчение стратификаций согласовано с t-структурами, так что переход к индуктивному пределу позволяет определить t-структуру превратности p:

$$(D_c^{b, \leqslant p}(X, \mathbf{C}), \quad D_c^{b, \geqslant p}(X, \mathbf{C}))$$

на триангулированной категории $D_c^b(X, \mathbf{C})$ ограниченных комплексов пучков комплексных векторных пространств на X с конструктивными (относительно какой-либо стратификации X комплексными многообразиями) когомологиями.

1.9.1. Предложение. Для $\mathcal{F}^{\cdot} \in D_c^b(X, \mathbf{C})$ следующие условия эквивалентны

а) X—p-превратный пучок.

б) Каждое неприводимое подмногообразие $S \subset X$ содержит открытое по Зарисскому $U \subset S$ такое, что обозначая через $j: U \to X$ вложение, имеем

$$H^i(Rj^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}) = 0 \quad \text{при } i > p(\dim_{\mathbf{R}} S);$$

$$H^{\cdot}(j^!\mathcal{F}^{\cdot}) = 0 \quad \text{при } i < p(\dim_{\mathbf{R}} S).$$

1.10. Простые объекты. В случае, когда $R = k$ — поле, а превратность p зависит лишь от $\dim S$ и удовлетворяет условию (5), можно дать следующее описание простых объектов в абелевой категории $M_{\mathcal{S}}(p, X) = M(p, X) \cap D_{\mathcal{S}}(X, k)$.

1.10.1. Предложение. Категория $M_{\mathcal{S}}(p, X)$ артинова. Ее простые объекты имеют вид $L(S, \mathcal{E}) = {}^p(i_S)_{*!}[p(S)]$, $S \in \mathcal{S}$, $\mathcal{E}$ — неприводимый локально постоянный пучок векторных пространств на S. В частности, если все страты односвязны, простые объекты $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(p, X)$ взаимно однозначно отвечают стратам $S \in \mathcal{S}$. ■

Если не фиксировать стратификацию, то категория p-превратных пучков заданной превратности p будет, вообще говоря, лишь нётеровой, но не артиновой. Однако если $p=p_{1/2}$ — самодвойственная фильтрация, то ввиду двойственности Вердье, нётеровость влечет артиновость. В частности, если X — комплексное многообразие, получаем следующее утверждение.

1.10.2 Предложение. Категория $\mathscr{M}(p_{1/2}, X)$ $p_{1/2}$-превратных пучков на X с когомологиями, конструктивными относительно какой-либо стратификации X комплексными неособыми подмногообразиями (см. п. 1.9) артинова. Ее простые объекты имеют вид $L(S, \mathscr{E})$, (см. п. 1.10.1), где $S\subset X$ — неособое неприводимое подмногообразие, ε—неприводимый локально постоянный пучок на S. При этом $L(S, \mathscr{E})\cong L(S',\mathscr{E}')$, если и только если $S\cap S'$ плотно в S и S' и $\mathscr{E}|_{S\cap S'}\cong\mathscr{E}'|_{S\cap S'}$. ■

§ 2. Склейка

2.1. Что такое склейка. В этом параграфе обсуждается следующая задача. Пусть X — топологическое пространство, $U\subset X$ — открытое подмножество, $Y=X\setminus U$ — его дополнение, $j: U\to X$, $i: Y\to X$ — соответствующие вложения. Мы интересуемся тем, как связаны превратные пучки на X с превратными пучками на U и на Y. Все известные нам результаты о склейке можно объединить в две большие группы, которые условно называются склейками структур и склейками сердцевин. Типичными представителями этих групп являются соответственно теорема п. 2.2.1 и теорема п. 2.5.1.

2.2. Склейка t-структур. Предположим, что на пространстве X задана стратификация $\mathscr{S}$, и U является открытым объединением стратов (так что $Y=X\setminus U$ также объединение стратов). Пусть p — превратность на $\mathscr{S}$; обозначим той же буквой индуцированные превратности на U и на Y. Напомним, что в гл. 5, п. 3.7.3 мы описали, как по произвольным t-структурам на $D(\mathscr{S}\mathscr{A}b_U)$ и $D(\mathscr{S}\mathscr{A}b_Y)$ можно построить t-структуру на $D\mathscr{J}(\mathscr{A}b_X)$, используя для этого шесть функторов $i^{\cdot}$, $i^{!}$, $i_{\cdot}$, $Rj_{\cdot}$, $j_!$, $j^{\cdot}$, удовлетворяющих некоторым условиям согласованности (см. гл. 5, п. 3.7.1.).

2.2.1. Теорема. t-структуры превратности p на $D(\mathscr{S}\mathscr{A}b_X)$, $D(\mathscr{S}\mathscr{A}b_U)$, $D(\mathscr{S}\mathscr{A}b_Y)$ связаны между собой конструкцией из гл. 5, п. 3.7.3.

Эта теорема позволяет применить к исследованию превратных пучков общую технику t-структур. В частности, описание простых превратных пучков из п. 1.10 можно обобщить следующим образом. Применяя функтор H^0 (относительно t-структуры превратности p) к $j_!$, получаем функторы

$$^p j_., {}^p j_! : \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O}) \to \mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$$

и морфизм функторов

$$F: {}^p j_! \to {}^p j_..$$

После этого $^p j_{*!}: \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O}) \to \mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$ определяется как функтор, сопоставляющий $F^{\cdot} \in \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$ объект $\operatorname{Im} F_F$ категории $\mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$.

2.2.2. Предложение. Любой простой объект $\mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$ изоморфен либо объекту $^p i_. \mathcal{F}^{\cdot}$, где $\mathcal{F}^{\cdot}$ — простой объект $\mathcal{M}(p, Y, \mathcal{O})$, либо объекту $^p j_{*!} \mathcal{F}^{\cdot}$, где $\mathcal{F}^{\cdot}$ — простой объект $\mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$.

Отметим следующие две характеризации объекта $\mathcal{G}^{\cdot} = {}^p j_{*!} \mathcal{F}^{\cdot}$ для $\mathcal{F}^{\cdot} \in \mathcal{M}(p, U, \mathcal{O})$. С одной стороны, $\mathcal{G}^{\cdot}$ — это единственный объект $D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X)$, являющийся продолжением $\mathcal{F}^{\cdot}$ на X (то есть $j^{\cdot}\mathcal{G}^{\cdot} = \mathcal{F}^{\cdot}$), для которого

$$i^{\cdot}\mathcal{G}^{\cdot} \in D^{\leqslant -1}(p, Y, \mathcal{O}), \quad i^!\mathcal{G}^{\cdot} \in D^{\geqslant 1}(p, Y, \mathcal{O}).$$

С другой стороны, $\mathcal{G}$ — единственный объект $\mathcal{M}(p, X, \mathcal{O})$, являющийся продолжением $\mathcal{F}^{\cdot}$ на X, у которого нет подобъектов и факторобъектов, сосредоточенных на Y (то есть имеющих вид $^p i_. \mathcal{H}$ для $\mathcal{H} \in \mathcal{M}(p, Y, \mathcal{O})$). В этом смысле $^p j_{*!}\mathcal{F}^{\cdot}$ можно рассматривать как *минимальное* продолжение $\mathcal{F}^{\cdot}$ на X.

2.3. Склейка превратных пучков. Вторая группа результатов о склейке имеет дело со следующей ситуацией. Пусть $\mathcal{G}^{\cdot}$ и $\mathcal{H}^{\cdot}$ — превратные пучки на U и Y соответственно. Каковы те дополнительные данные, которые позволяют однозначно построить по $\mathcal{G}^{\cdot}$ и $\mathcal{H}^{\cdot}$ превратный пучок на X? Ответы на этот вопрос (выраженные на разных языках, но, по существу, эквивалентные) были получены несколькими авторами. В чисто топологической ситуации наиболее общий результат принадлежит Макферсону и Вилонену [110]. Мы изложим здесь подход, принадлежащий А. А. Бейлинсону и Вердье [23], [142].

2.3.1. Предположения. Зафиксируем обозначения и предположения, которые будут использоваться до конца этого параграфа. Будем считать, что X — комплексное многообразие, $Y \subset X$ — подмногообразие, которое задается в X одним уравнением $f=0$ для некоторой функции $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Мы будем рассматривать лишь самодвойственную превратность $p_{1/2}(S) = -(1/2)\dim_{\mathbb{R}} S$; категории $D^b_c(X, \mathbb{C})$ (см. п. 1.9) и $\mathcal{M}(p_{1/2}, X, \mathbb{C})$ (см. п. 1.10.2) мы будем обозначать D_X и $\mathcal{M}_X$; объекты $\mathcal{M}_X$ будем называть просто превратными пучками на X. Аналогичные обозначения будем использовать для пучков на Y и $U = X - Y$.

2.4. Функторы исчезающих циклов и их свойства. Определим, следуя Делиню [55], два функтора исчезающих циклов, связанных с функцией f. Обозначим $B=\mathbf{C}^1$, $B^*=\mathbf{C}^1\setminus\{0\}$, $\widetilde{B}^*$ — универсальная накрывающая B^*, $p:\widetilde{B}^*\to B^*$ — накрытие (можно считать, что $\widetilde{B}^*=\mathbf{C}$, $p(z)=e^z$). Имеем следующую коммутативную диаграмму пространств и отображений:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "f"] & U \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d, "f"] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & B & B^* \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} .$$

Обозначим через $\widetilde{X}^*$ расслоенное произведение X и $\widetilde{B}^*$ над B (относительно пары отображений f, p) и через $\pi:\widetilde{X}^*\to X$ естественную проекцию.

2.4.1. Определение (*функтор близких циклов*). Для $\mathcal{F}^\cdot\in D_X$ положим

$$\psi_f(\mathcal{F}^\cdot)=i^\cdot R\pi_*\pi^\cdot\mathcal{F}^\cdot. \tag{1}$$

2.4.2. Предложение. а) Формула (1) задает функтор $\psi_f:D_X\to D_Y$.

б) Если $\mathcal{F}^\cdot\in\mathcal{M}_X$, то $\psi_f\mathcal{F}^\cdot\in\mathcal{M}_Y$. ■

Поскольку $\pi(\widetilde{X}^*)=U\subset X$, $\psi_f\mathcal{F}^\cdot$ зависит лишь от $j^\cdot\mathcal{F}^\cdot$. Следовательно, ψ_f позволяет определить функтор (также обозначаемый ψ_f) из D_U в D_Y.

Далее, естественный морфизм $\mathcal{F}^\cdot\to R\pi_*\pi^\cdot\mathcal{F}^\cdot$ (сопряженность $R\pi_*$ и $\pi^\cdot$) задает морфизм функторов $\theta:i^\cdot\to\psi_f$.

2.4.3. Определение (*функтор исчезающих циклов*). Положим

$$\varphi_f(\mathcal{F}^\cdot)=\operatorname{cone}(\theta_{\mathcal{F}^\cdot}:i^\cdot\mathcal{F}\to\psi_f\mathcal{F}^\cdot) \tag{2}$$

(то есть $\varphi_f(\mathcal{F}^\cdot)$ — третий член выделенного треугольника, содержащего $\theta_{\mathcal{F}^\cdot}$).

2.4.4. Предложение. а) Формула (2) задает функтор $\varphi_f:D_X\to D_Y$.

б) *Если $\mathcal{F}^\cdot\in\mathcal{M}_X$, то $\varphi_f\in\mathcal{M}_Y$.*

Для доказательства а) нужно явно реализовать $\varphi_f\mathcal{F}^\cdot$ как простой комплекс, ассоциированный с двойным комплексом

$$\theta_{\mathcal{F}^\cdot}:i^\cdot\mathcal{F}^\cdot\to\psi_f\mathcal{F}^\cdot.$$

2.4.5. Монодромия. Отображение «сдвига на один виток» $t:\widetilde{B}^*\to\widetilde{B}^*$, $t(z)=z+2\pi i$ коммутирует с p, $p\circ t=p$, и, значит, задает отображение $\tau:\widetilde{X}^*\to\widetilde{X}^*$ с $\pi\circ\tau=\pi$. Следовательно, морфизм функторов $\lambda:\mathrm{Id}\to R\tau_*\cdot\tau^\cdot$ задает морфизм $R\pi_*\circ\lambda\circ\pi^\cdot:R\pi_*\pi^\cdot\to\to R\pi_*\pi^\cdot$, и, значит, морфизм функторов $T:\psi_f\to\psi_f$, называемый *монодромией*. Ясно, что T коммутирует с θ, $T\circ\theta=\theta$, так что получаем морфизм (называемый и обозначаемый так же) $T:\varphi_f\to\varphi_f$. Поскольку t — изоморфизм, T является автоморфизмом.

2.4.6. Морфизмы can **и** var. Через can и var обозначаются два морфизма функторов:

$$\mathrm{can}:\varphi_f\to\psi_f,$$

возникающий из выделенного треугольника, определяющего φ_f, и

$$\mathrm{var}:\psi_f\to\varphi_f,$$

возникающий из морфизма выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} i^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot} & \to & \psi_f(\mathcal{F}^{\cdot}) & \xrightarrow{\mathrm{can}_{\mathcal{F}}} & \varphi_f(\mathcal{F}^{\cdot}) & \to & i^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot}\,[1] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{\mathcal{F}^{\cdot}}-\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{var}_{\mathcal{F}^{\cdot}}} & & \downarrow \\ 0 & \to & \psi_f(\mathcal{F}^{\cdot}) & \to & \psi_f(\mathcal{F}^{\cdot}) & \to & 0, \end{array}$$

так что $\mathrm{var}\circ\mathrm{can}=T-\mathrm{id}$.

2.5. Данные склейки. Введем категорию $\mathrm{Glue}(Y,U)$, объектами которой являются четверки $(\mathcal{G}^{\cdot},\mathcal{H}^{\cdot},a,b)$, где $\mathcal{G}^{\cdot}\in\mathrm{Ob}\mathcal{M}_U$, $\mathcal{H}^{\cdot}\in\mathrm{Ob}\mathcal{M}_Y$, $a:\psi_f(\mathcal{G}^{\cdot})\to\mathcal{H}^{\cdot}$, $b:\mathcal{H}^{\cdot}\to\psi_f(\mathcal{G}^{\cdot})$ — морфизмы в $\mathcal{M}_Y$ такие, что $b\circ a=T_{\mathcal{G}^{\cdot}}-\mathrm{id}$. Морфизмы в $\mathrm{Glue}(Y,U)$ определяются естественным образом.

2.5.1. Теорема. Категории $\mathcal{M}_X$ и $\mathrm{Glue}(Y,U)$ эквивалентны. Функтор $\mathcal{M}_X\to\mathrm{Glue}(Y,U)$, осуществляющий эту эквивалентность, переводит $\mathcal{F}^{\cdot}\in\mathrm{Ob}\mathcal{M}_X$ в четверку

$$(j^{\cdot}\mathcal{F}^{\cdot},\ \varphi_f\mathcal{F}^{\cdot},\ \mathrm{can}_{\mathcal{F}^{\cdot}},\ \mathrm{var}_{\mathcal{F}^{\cdot}}).$$

2.6. Пример. Простейший пример отвечает ситуации $X=B$, $Y=\{0\}$, $U=B^*$, $f(z)=z$. В этом случае $M_U,\mathcal{P}$ — это категория локально постоянных пучков $\mathcal{F}$ (локальных систем) на B^*. Поскольку $\pi_1(B^*)=\mathbf{Z}$, $M_U,\mathcal{P}$ эквивалентна категории, состоящей из пар (V,A), где V — конечномерное векторное пространство (слой $\mathcal{F}$ над какой-нибудь точкой B^*), $A:V\to V$ — обратимый линейный оператор (геометрический оператор монодромии, отвечающий обходу вокруг нуля в положительном направлении). Далее, категория $\mathcal{M}_Y$ эквивалентна категории векторных пространств. Функтор $\psi_f:\mathcal{M}_U\to\mathcal{M}_Y$ переводит (V,A) в V, и оператор монодромии T совпадает с $A-\mathrm{Id}$. Поэтому категория $\mathcal{M}_X$ эквивалентна следующей категории $\mathcal{A}$ «данных линейной алгебры»:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}=\{(V,W,E,F)\},$$

где V, W — конечномерные линейные пространства, $E:V\to W$, $F:W\to V$ — линейные операторы, причем $\mathrm{Id}+F\circ E$ обратим (морфизмы в $\mathcal{A}$ определяются естественным образом).

2.7. Еще пример: координатная стратификация. Применяя теорему п. 2.5.1 несколько раз, можно получить описание категории $M_{X,\mathcal{S}}$ в терминах данных линейной алгебры и для более сложных стратификаций $\mathcal{S}$. Следующий пример показывает, что при этом получается. Пусть $X=\mathbf{C}^n$, $\mathcal{S}$ — стратификация, стратами которой являются подмножества $X_I\subset X$, $I\subset\{1,\ldots,n\}$, задаваемые так: $X_I=\{(x_1,\ldots,x_n):x_i=0$ для $i\in I$, $x_i\neq 0$ для $i\notin I\}$. Категория превратных пучков на X, когомологии которых конструктивны относительно стратификации $\mathcal{S}$, эквивалентна следующей категории $\mathcal{A}_{(n)}$:

один объект $\mathcal{A}_{(n)}$ — это набор из 2^n конечномерных линейных пространств V_I, $I\subset\{1,\ldots,n\}$ и отображений $E_{I,i}:V_I\to V_{I\cup\{i\}}$, $F_{I,i}:V_{I\cup\{i\}}\to V_I$, $i\notin I$, удовлетворяющих следующим условиям

$$E_{I\cup\{j\},i}E_{I,j}=E_{I\cup\{i\},j}E_{I,i},$$

$$F_{I,j}F_{I\cup\{j\},i}=F_{I,i}F_{I\cup\{i\},j} \text{ при } i,\ j\notin I,\ i\neq j,$$

$$E_{I\setminus\{j\},i}F_{I\setminus\{j\},j}=F_{I\cup\{i\}\setminus\{j\}}E_{I,i} \text{ при } i\notin I,\ j\in I.$$

$$F_{I,i}E_{I,i}+\mathrm{Id} \text{ обратим.}$$

Морфизмы в $\mathcal{A}_{(n)}$ — это наборы отображений $f_I:V_I\to V'_I$, перестановочные со всеми $E_{I,i}$, $F_{I,i}$.

2.7.1. Предложение. Категория $\mathcal{M}_{X,\mathcal{S}}$ эквивалентна категории $\mathcal{A}_{(n)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Понятие превратного пучка в том виде, как оно изложено в этом параграфе, впервые появилось у А. А. Бейлинсона, И. Н. Бернштейна, Делиня и Габбера (см. [25]). Первоначальная цель их работы состояла в том, чтобы установить соответствие между модулями над кольцами алгебраических дифференциальных операторов и комплексами конструктивных пучков в рамках соответствия Римана—Гильберта (см. следующую главу). Класс весьма важных примеров извращенных пучков доставляют так называемые пучки (ко)гомологий пересечения (intersection homology), введенные (по предложению Делиня) Горески и Макферсоном [70] в развитие их работ по двойственности Пуанкаре для особых многообразий. Подробное изложение работы [70], вместе с необходимыми понятиями теории пучков, см. в [29].

В дальнейшем оказалось, что превратные пучки во многих отношениях не хуже (а иногда и лучше) обычных пучков приспособлены к использованию в задачах топологии и анализа на особых многообразиях. В этом обзоре мы оставляем в стороне большинство связей теории превратных пучков с задачами анализа (L^2-когомологии, см. [45]), теории представлений (см. [67], [92], [136], [143]), теории структур Ходжа [126], топологии особых многообразий [29], сконцентрировав наше внимание в основном на гомологической стороне теории. Хорошим обзором всех указанных выше связей теории превратных пучков может служить доклад [109]. Подробная библиография содержится в [71].

Доказательство большинства результатов, сформулированных в § 1, можно найти в [25]. Предложение п. 1.6.2 доказано в [70] и в [29]. Теорема п. 2.2.1 и предложение п. 2.2.2 доказаны в [25]. Функторы близких и исчезающих циклов в контексте производных категорий были введены Делинем [55], обобщившим топологическую конструкцию Милнора. Идея использовать эти функторы для склейки превратных пучков принадлежит нескольким авторам: помимо топологических подходов Макферсона—Вилонена [110], Делиня—Вердье [142], А. А. Бейлинсона [22], [23] имеется (эквивалентный) подход Кашивары [96], использующий язык D-модулей и соответствие Римана—Гильберта (см. след. главу). Описание конкретных категорий превратных пучков, полученных с помощью этих подходов, см. в [112], [111], [120]. В частности, примеры пп. 2.6 и 2.7 заимствованы из [112].

Глава 8

$\mathcal{D}$-МОДУЛИ

§ 0. Введение

0.1. Линейные дифференциальные уравнения и $\mathcal{D}$-модули. Рассмотрим систему линейных уравнений E:

$$\sum_{j=1}^{p} R_{ij}u_j=0, \quad i=1, \ldots, q, \tag{1}$$

где u_j — неизвестные функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$, R_{ij} — линейные дифференциальные операторы (возможно, с переменными коэффициентами). В классической теории мы интересуемся решениями такой системы.

Чтобы описать эту задачу на алгебраическом языке, обозначим кольцо функций от $x_1, \ldots, x_n$, в котором лежат коэффициенты системы, через A: это могут быть гладкие, вещественно-аналитические, комплексно-аналитические или полиномиальные функции в некоторой области U. Далее, обозначим через $\mathcal{D}$ кольцо дифференциальных операторов с коэффициентами в A. По системе (1) построим левый $\mathcal{D}$-модуль M как коядро отображения левых $\mathcal{D}$-модулей $R: \mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^q$, задаваемого умножением справа на матричный оператор (R_{ij}):

$$\mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^q \to M \to 0. \tag{2}$$

Решения системы (1) необязательно искать в A: мы можем интересоваться, например, обобщенными решениями, которые не образуют кольца. Существенно лишь, что их можно дифференцировать и умножать на функции. Поэтому имеет смысл рассмотреть другой левый $\mathcal{D}$-модуль N и определить множество $\mathrm{Sol}(E, N)$ как множество решений E со значениями в N. Очевидно, имеем:

$$\mathrm{Sol}(E, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N). \tag{3}$$

Это равенство показывает, что изучение категории левых

$\mathcal{D}$-модулей является алгебраической версией теории уравнений (1).

0.2. Характеристическое многообразие. Пусть $p=q=1$, $r(x, \xi)$ — старший символ оператора R. Уравнение $r(x, \xi)=0$ определяет многообразие в кокасательном расслоении к области U, которое называется характеристическим многообразием уравнения $Ru=0$. Роль характеристических направлений хорошо известна в классической теории: соответствующие им гиперповерхности являются поверхностями постоянной фазы коротковолновых решений, а проекция характеристического многообразия на U является носителем возможных сингулярностей решений.

В случае общей системы (1) для определения характеристического многообразия следует рассмотреть точки (x, ξ), в которых ранг матрицы старших символов коэффициентов (1) становится меньше числа неизвестных функций. В действительности, это наивное определение становится правильным лишь после добавления к системе (1) всех ее дифференциальных следствий, и гораздо удобнее пользоваться эквивалентным алгебраическим определением в терминах $\mathcal{D}$-модуля M (2). Оно состоит в следующем. Пусть $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ — пространство операторов степени $\leqslant i$, $M_i = \mathcal{D}_i M_0$, где M_0 — A-подмодуль с конечным числом образующих в M, порождающий M над $\mathcal{D}$. Тогда $\operatorname{Gr} M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i/M_{i-1}$ является градуированным модулем над коммутативным кольцом $\operatorname{Gr}\mathcal{D} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}_i/\mathcal{D}_{i-1}$. Это последнее кольцо представляет собой кольцо послойно-полиномиальных функций на кокасательном расслоении T^*U к области U, а модуль $\operatorname{Gr} M$ является модулем сечений некоторого пучка на T^*U. Носитель этого пучка и есть характеристическое многообразие системы (1).

Один из первых результатов гомологической теории $\mathcal{D}$-модулей связывает размерность характеристического многообразия M с наименьшим j, для которого $\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{D}}(M, A)=0$ (см. гл. 1, п. 6.1 и п. 2.7).

0.3. Локализация. Меняя область U в многообразии X, мы приходим к необходимости стать на точку зрения теории пучков: кольцо A заменяется структурным пучком $\mathcal{O}_X$, кольцо $\mathcal{D}$ становится пучком колец $\mathcal{D}_X$ дифференциальных операторов на X, M заменяется на пучок $\mathcal{D}_X$-модулей. При этом возникает новый аспект теории — гомологические инварианты $\mathcal{D}_X$-модулей на многообразии.

Эта глава посвящена преимущественно случаю, когда $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное алгебраическое многообразие. В §§ 3—5 изложен формализм пучков $\mathcal{D}_X$-модулей. В необходимых местах мы вводим соответствующую производную категорию.

Оправданием этого с классической точки зрения служит возможность сформулировать далеко идущее обобщение программы Римана—Гильберта об описании системы уравнений особенностями ее решений (см. ниже, п. 6.5).

0.4. Голономность и регулярность. Характеристическое многообразие системы (1) в n-мерной области имеет размерность не меньше n. Если она равна n, система и ее модуль M называются *голономными*. Ранее такие системы назывались максимально переопределенными. Такие системы наиболее близки к системам обыкновенных дифференциальных уравнений: их решения зависят от конечного числа констант. Поэтому они наиболее поддаются изучению алгебраическими средствами. Классические уравнения — волновое, Лапласа и т. п. — отнюдь не являются голономными.

Общим свойствам голономных модулей посвящен § 5.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами хорошо известна важность условия регулярности по Фуксу уравнения вблизи особой точки. Она обеспечивает хорошее поведение решений при приближении к особой точке x_0, в частности, возможность разложить решение по мономам $(x-x_0)^\alpha \log(x-x_0)^\beta$ и возможность локально восстановить уравнение вблизи особой точки по монодромии — свойствам ветвления решений.

Для голономных модулей также можно ввести определение регулярных особенностей и обобщить на них эти свойства, чему посвящены §§ 6, 7.

0.5. Программа Римана—Гильберта. Простейшая голономная система имеет вид

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0; \quad i=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, p.$$

Ее решениями являются постоянные векторы $u_j=c_j$. Если голономная система в окрестности точки U приводится к такому виду линейной обратимой заменой (u_j) с аналитическими коэффициентами, то она называется гладкой в этой окрестности. Та же терминология применяется к $\mathcal{D}_X$-модулю M.

Категория голономных гладких $\mathcal{D}_X$-модулей на X_{an} антиэквивалентна категории локальных систем конечномерных пространств на X_{an}, которая задается функтором Sol:

$$M \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) \quad \text{(пучок гомоморфизмов)}$$

Если опустить условие гладкости, то эта теорема допускает следующее глубокое обобщение, принадлежащее к числу центральных результатов гомологической теории $\mathcal{D}_X$-модулей.

Пусть $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ — производная категория голономных регулярных $\mathcal{D}_X$-модулей, а $D^b_c(X)$ — триангулированная категория комплексов пучков векторных пространств, имеющих конструктивные когомологии (см. гл. 7, п. 1.6.1). Тогда функтор

$R\mathscr{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$ определяет антиэквивалентность

$$D^b_{hr}(\mathscr{D}_X\text{-mod}) \xrightarrow{\sim} D^b_c(X).$$

§ 1. Алгебра Вейля

1.1. Определение. *Алгеброй Вейля* $A_n(\mathbf{C}) = A_n$ называется алгебра с $2n$ образующими $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$, удовлетворяющими соотношениям $[x_i, x_j] = 0$, $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $[\partial_i, x_j] = 0$ при $i \neq j$, $[\partial_i, x_i] = 1$.

Ясно, что любой элемент $P \in A_n$ однозначно записывается в виде

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндексы, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n}$; $a_{\alpha\beta} \in \mathbf{C}$, сумма в (1) конечна. Таким образом, A_n естественно представлять себе как алгебру дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Под A_n-модулем M мы, если не оговорено, будем понимать левый A_n-модуль с конечным числом образующих.

Два важных примера:

а) $M = A_n / A_n(\partial_1, \ldots, \partial_n)$. Легко видеть, что M можно представить в виде $M = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $\partial_j(F) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ (формальная производная), $x_j(F) = x_j F$ (умножение).

б) $M = A_n / A_n(x_1, \ldots, x_n)$. Такой модуль M удобно представлять себе как модуль обобщенных функций (функционалов на пространстве многочленов) с носителем в точке 0.

1.2. Свойства A_n. а) A_n — простая алгебра; б) A_n лево- и правонётерова; в) каждый A_n-модуль конечной длины цикличен (порождается одной образующей); г) отображение $x_j \mapsto \partial_j$, $\partial_j \mapsto -x_j$ задает автоморфизм A_n (формальное преобразование Фурье).

Докажем свойство а). Пусть $I \subset A_n$ — ненулевой двусторонний идеал, $0 \neq P = \Sigma a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \in I$. Если $m > 0$ — максимальная степень вхождения x_j в P, то $[\partial_j, P] \neq 0$ и максимальная степень вхождения x_j в $[\partial_j, P]$ равна $m-1$. Коммутируя ∂_j с P m раз, мы получим ненулевой элемент I, в который не входит x_j. Коммутируя нужное число раз со всеми ∂_j и x_j, мы получим, что $1 \in I$, так что $I = A_n$.

Свойство б) вытекает из нётеровости кольца многочленов от $2n$ переменных, которое является присоединенным градуированным кольцом для некоторой фильтрации в A_n (см. ниже).

Свойство в) выполнено для любой алгебры A, имеющей бесконечную длину как левый A-модуль (теорема Стаффорда, см. [27]).

Свойство г) очевидно. Отметим, что при формальном преобразовании Фурье модули из а) и б) в п. 1.1 переходят друг в друга.

1.3. Гомологические свойства. Одним из основных свойств алгебры A_n с точки зрения гомологической алгебры является следующий результат:

1.3.1. Теорема. Гомологическая размерность A_n равна n; другими словами, для любых A_n-модулей M, N имеем

$$\mathrm{Ext}^j(M, N)=0 \text{ при } j>n.$$

В следующих нескольких пунктах мы приведем набросок доказательства этой теоремы и ряда ее уточнений.

1.4. Фильтрации. Мы будем рассматривать на A_n следующие две возрастающие фильтрации линейными подпространствами:

а) *фильтрация Бернштейна*:

$$B_j=\{a_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta : |\alpha|+|\beta|\leqslant j\}.$$

б) *стандартная фильтрация* (степенями дифференциального оператора)

$$\Sigma_j=\{a_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta : |\beta|\leqslant j\}.$$

Обозначая через $\{\mathcal{F}_j\}$ любую из этих фильтраций, имеем, очевидно,

$$\mathcal{F}_i\mathcal{F}_j\subset\mathcal{F}_{i+j}, \quad \bigcup\mathcal{F}_j=A_n.$$

Пусть

$$\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}A_n=\bigoplus_{j=0}^{\infty}\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$$

(мы считаем, что $\mathcal{F}_{-1}=\{0\}$). Легко проверить, что для каждой из фильтраций $\{B_j\}$, $\{\Sigma_j\}$ $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}A_n$ является алгеброй многочленов от $2n$ переменных $\bar{x}_j$, $\bar{\partial}_j\in\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$.

Фильтрацией A_n-модуля M, *согласованной с* $\mathcal{F}$, называется возрастающая последовательность $\{0\}=\Gamma_{-1}\subset\Gamma_0\subset\subset\Gamma_1\subset\ldots\subset M$ линейных подпространств такая, что

$$\mathcal{F}_i\Gamma_j\subset\Gamma_{i+j}, \quad \bigcup\Gamma_j=M,$$

$\mathcal{F}_0$-модули Γ_j имеют конечное число образующих.

Соответствующее градуированное пространство

$$\mathrm{gr}^{\Gamma}M=\bigoplus_{j=0}^{\infty}\Gamma_j/\Gamma_{j-1}$$

естественно снабжается структурой $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}}A_n$-модуля.

Если $v\in\Gamma_j$, $v_j\notin\Gamma_{j-1}$, образ v в Γ_j/Γ_{j-1} называется *символом* v (обозначение: $\sigma(v)$).

Фильтрация $\{\Gamma_j\}$ модуля M называется *хорошей*, если существует такое j_0, что

$$\mathcal{F}_i\Gamma_j=\Gamma_{i+j} \text{ для всех } i\geqslant 0,\ j\geqslant j_0.$$

1.4.1. Предложение. а) Каждый конечно порожденный A_n-модуль M обладает хорошей фильтрацией.

б) Фильтрация $\{\Gamma_j\}$ модуля M является хорошей, если и только если $\mathrm{gr}^\Gamma M$ конечно порожден над $\mathrm{gr}^{\mathcal{F}} A_n$. В этом случае M обязательно конечно порожден над A_n.

в) Пусть $\{\Gamma_j\}$, $\{\Gamma_j'\}$ — две хорошие фильтрации M. Тогда существует такое j_0, что $\Gamma_{j-j_0}\subset\Gamma_j'\subset\Gamma_{j+j_0}$ для всех j.

1.5. Характеристическое многообразие A_n-модуля. Пусть M — конечно порожденный A_n-модуль, $\{\Gamma_j\}$ — хорошая фильтрация M относительно стандартной фильтрации $\{\Sigma_j\}$ на A_n. Пусть $I=\mathrm{ann}\,\mathrm{gr}^\Gamma M\subset\mathrm{gr}^\Sigma A_n$ (то есть I есть идеал тех $P\in\mathrm{gr}^\Sigma A_n$, что $Pu=0$ для некоторого $0\neq u\in\mathrm{gr}^\Gamma M$), $J(M)=\sqrt{I}$ — радикал I. Рассматривая $\mathrm{gr}^\Sigma A_n$ как кольцо многочленов от $2n$ переменных $\bar{x}_j$, $\bar{\partial}_j$, обозначим через $\mathrm{ch}\,M\subset\mathbf{C}^{2n}$ подмногообразие нулей идеала $J(M)$. Из п. 1.4.1 в) вытекает, что $J(M)$ и $\mathrm{ch}\,M$ (в отличие от I) зависят лишь от M, но не от $\{\Gamma_j\}$. Многообразие $\mathrm{ch}\,M$ называется *характеристическим многообразием* A_n-модуля M.

1.6. Связь $\mathrm{ch}\,M$ и когомологических свойств M. Сопоставим A_n-модулю M два следующих числа:

$$\delta(M)=\dim\mathrm{ch}\,M(=\text{размерность Крулля } \mathrm{gr}^\Sigma A_n/J(M)),$$

$$j(M)=\min\{j:\mathrm{Ext}^j_{A_n}(M, A_n)\neq 0\}.$$

1.6.1. Теорема. $j(M)+\delta(M)=2n$.

1.7. План доказательства теоремы п. 1.6.1.

а) Положим для краткости $S=\mathrm{gr}^\Sigma A_n$. Пусть Γ — хорошая (относительно Σ) фильтрация на M. Теория размерности для градуированных конечно порожденных модулей над коммутативными регулярными алгебрами показывает прежде всего, что утверждение, аналогичное теореме п. 1.6.1, справедливо для S-модуля $\mathrm{gr}\,M=N$. А именно, полагая

$$\delta'(N)=\mathrm{Kr}\dim(S/\mathrm{Ann}_S N),$$

$$j'(N)=\min\{j:\mathrm{Ext}^j_S(N, S)\neq 0\}$$

(Ext берется в категории градуированных S-модулей), имеем $j'(N)+\delta'(N)=2n$.

б) Непосредственно из определения ясно, что $\delta'(\mathrm{gr}\,M)=\delta(M)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что $j'(\mathrm{gr}\,M)=j(M)$. Для этого строится спектральная последовательность, сходящаяся к $\mathrm{Ext}^j(M, A_n)$.

в) *Спектральная последовательность.* Мы утверждаем, что существует спектральная последовательность с

$$E_1^{pq} = \mathrm{Ext}_S^{p+q}(\mathrm{gr}\, M,\ S[-p])$$

(где $S[-p]$ — свободный S-модуль с одной образующей степени p), сходящаяся к

$$E_\infty^{p+q} = \mathrm{Ext}_{A_n}^{p+q}(M,\ A_n).$$

Из существования такой спектральной последовательности равенство $j'(\mathrm{gr}\, M) = j(M)$ вытекает достаточно просто. Сама же спектральная последовательность строится следующим образом.

Существует свободная резольвента M фильтрованными A_n-модулями

$$\ldots \to L^{-2} \to L^{-1} \to L^0 \to M \to 0$$

такая, что

$$\ldots \to \mathrm{gr}\, L^{-2} \to \mathrm{gr}\, L^{-1} \to \mathrm{gr}\, L^0 \to \mathrm{gr}\, M \to 0$$

— резольвента $\mathrm{gr}\, M$ свободными градуированными S-модулями, и S-ранг $\mathrm{gr}\, L^{-i}$ равен A_n-рангу L^{-i}.

Положим теперь $K^i = \mathrm{Hom}_{A_n}(L^{-i}, A_n)$ и введем в K^i убывающую фильтрацию, полагая $F^p K^i = \{\varphi : L^{-i} \to A_n, \varphi(\Gamma_k(L^{-i})) \subset \subset \mathscr{F}_{k-p}\}$. Легко проверить, что дифференциалы $d : L^{-i} \to L^{-i+1}$ индуцируют на $\{K^i\}$ структуру фильтрованного комплекса, и требуемая спектральная последовательность является спектральной последовательностью этого фильтрованного комплекса.

г) В действительности, анализ спектральной последовательности из предыдущего пункта позволяет не только установить равенство $j'(\mathrm{gr}\, M) = j(M)$, но и доказать следующее утверждение (используя соответствующее утверждение для S-модулей):

$$\delta\left(\mathrm{Ext}_{A_n}^j(M,\ A_n)\right) \leqslant 2n - j \text{ для всех } j$$

с равенством для $j = j'(\mathrm{gr}\, M) = j(M)$ (здесь $\mathrm{Ext}_{A_n}^j(M,\ A_n)$ рассматривается как правый A_n-модуль, со структурой, индуцированной правым действием A_n на себя).

1.8. Замечание. Теорема п. 1.6.1 и утверждение п. 1.7 г) верны в более общей ситуации, когда вместо A_n рассматривается кольцо R с фильтрацией, для которой $\mathrm{gr}\, R$ является регулярным коммутативным нётеровым кольцом чистой размерности s, а вместо M — конечно порожденный R-модуль с хорошей фильтрацией (в этом случае $2n$ нужно заменить на s).

В частности, она верна в случае, когда рассматривается кольцо A_n с фильтрацией $\{B_j\}$ вместо $\{\Sigma_j\}$. Обозначая в этом случае соответствующую размерность Крулля через $d(M)$, получаем, что $d(M)+j(M)=2n$ (поскольку $j(M)$, очевидно, не зависит ни от какой фильтрации), так что, в частности, $d(M)=\delta(M)$. С другой стороны, для $d(M)$ можно доказать важное неравенство, называемое *неравенством Бернштейна* (см. п. 1.10).

1.9. Полином Гильберта. В следующих двух пунктах мы будем рассматривать фильтрацию Бернштейна $\{B_i\}$ на A_n. Для нее

$$\dim B_j = j^{2n}/(2n)! + \text{члены меньшей степени по } j.$$

Пусть M — конечно порожденный A_n-модуль с хорошей фильтрацией $\{\Gamma_j\}$, так что $\mathrm{gr}^\Gamma M$ — конечно порожденный градуированный модуль над $S=\mathrm{gr}^B A_n = \mathbf{C}[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\partial}_1, \ldots, \bar{\partial}_n]$ (с $\deg \bar{x}_j = \deg \bar{\partial}_j = 1$). Согласно теории размерности, для коммутативных колец существует многочлен

$$\chi(M, \Gamma, t) = \frac{m}{d!} t^d + O(t^{d-1}), \quad m, d \in \mathbf{Z}_+,$$

для которого

$$\dim \Gamma_j = \sum_{i=0}^{j} \dim \Gamma_j/\Gamma_{j-1} = \chi(M, \Gamma, j) \text{ при } j \gg 0.$$

При этом константы $d=d(M)$ (размерность Крулля S-модуля $S=\mathrm{Ann}_S \mathrm{gr}^\Gamma M$) и m не зависят от $\{\Gamma_j\}$ (они называются размерностью и кратностью M).

1.10. Неравенство Бернштейна. Это удивительное свойство A_n, установленное И. Н. Бернштейном в 1971 году [2], состоит в следующем:

Пусть $M\neq\{0\}$ — конечно порожденный A_n-модуль. Тогда $d(M)\geqslant n$.

В частности, далеко не любой S-модуль имеет вид $\mathrm{gr}^\Gamma M$ для некоторого A_n-модуля M.

Приведем доказательство неравенства Бернштейна, принадлежащее Джозефу.

Пусть $\{\Gamma_i\}$ — хорошая фильтрация M. Можно, очевидно, считать, что $\Gamma_0\neq\{0\}$. Докажем прежде всего, что $\mathbf{C}$-линейное отображение

$$B_i \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\Gamma_i, \Gamma_{2i}), \quad P \mapsto (f \mapsto Pf), \quad P \in A_n, \quad f \in M,$$

является вложением. Используем индукцию по i. При $i=0$ утверждение вытекает из того, что $\Gamma_0\neq\{0\}$.

Пусть $0\neq P\in B_i$. Нам нужно доказать, что $P\Gamma_i\neq\{0\}$. Предположим напротив, что $P\Gamma_i=\{0\}$. Тогда P не может быть константой, так что в выражение

$$P=\Sigma a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

входит либо какой-то x_j, либо какой-то ∂_j. В первом случае $[P, \partial_j]\neq 0$, $[P, \partial_j]\in B_{i-1}$ и $[P, \partial_j]M=\{0\}$, что противоречит предположению индукции для $i-1$. Во втором случае нужно взять x_j вместо ∂_j.

Пусть теперь $\chi(t)=\chi(M,\Gamma,t)$ — многочлен Гильберта, так что

$$\chi(M,\Gamma,i)=\dim\Gamma_i \text{ при } i\gg 0.$$

Тогда при $i\gg 0$ имеем

$$\frac{1}{(2n)!}i^{2n}+O(i^{2n-1})=\dim B_i\leqslant\dim \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(\Gamma_i,\ \Gamma_{2i})=\chi(i)\,\chi(2i),$$

откуда $\deg\chi\geqslant n$, то есть $d(M)\geqslant n$.

1.10.1. Инволютивность. Поскольку, согласно п. 1.8, $d(M)=\delta(M)$, из неравенства Берштейна получаем, что

$$\delta(M)=\dim \operatorname{ch} M\geqslant n, \text{ если } M\neq\{0\}.$$

Это имеет следующее далеко идущее (и гораздо более трудно доказываемое) обобщение (Стернберг—Гийемин—Мальгранж—Габбер, см. [63], [113], [27]):

$$\operatorname{ch} M\subset\operatorname{spec}\mathbf{C}[\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_n,\ \bar{\partial}_1,\ \ldots,\ \bar{\partial}_n]=\mathbf{C}^{2n}$$

является инволютивным подмногообразием относительно симплектической структуры, определяемой формой $\omega=\sum d\bar{x}_j\wedge d\bar{\partial}_j$.

1.11. Гомологическая размерность A_n равна n. Все изложенное выше в равной степени применимо и к правым A_n-модулям. Для каждого левого A_n-модуля M такими правыми A_n-модулями будут $\operatorname{Ext}^j_{A_n}(M,A_n)$. Из формулы (1) и из неравенства Бернштейна для правых A_n-модулей получаем, что

$$\operatorname{Ext}^j_{A_n}(M,A_n)=0 \quad\text{при } j>n.$$

Далее, используя свободную резольвенту произвольного A_n-модуля N, можно доказать, что

$$\operatorname{Ext}^j_{A_n}(M,N)=0 \quad\text{при } j>n$$

для любых двух левых (или правых) A_n-модулей, с конечно порожденным M. Окончательно получаем, что

$$\operatorname{dh} A_n\leqslant n.$$

Из результатов следующего пункта будет следовать, что $\operatorname{dh} A_n$ в точности равно n.

1.12. Голономные модули. Из п. 1.6.1 и п. 1.11 вытекает, что для любого A_n-модуля M группы $\operatorname{Ext}_{A_n}{}^j(M,A_n)$ могут быть отличны от 0 лишь для $2n-d(M)\leqslant j\leqslant n$. Модули, для которых этот интервал сводится к одному значению $j=n$, называются *голономными*. Таким образом, A_n-модуль M называется голономным, если либо $M=\{0\}$, либо $d(M)=n$.

Модули из примеров а), б) в п. 1.1 очевидно голономны.

Приведем ряд свойств и примеров голономных модулей.

а) Подмодули и фактормодули голономных модулей голономны.

б) Пусть M — произвольный A_n-модуль и $\{\Gamma_j\}$ — согласованная с $\{B_j\}$ фильтрация M, для которой $\dim \Gamma_j \leqslant \frac{c}{n!} j^n + c_1 j^{n-1}$. Тогда M голономен и $m = m(M) \leqslant c$. В частности, M конечно порожден (для доказательства нужно проверить, что длина строго возрастающей цепочки конечно порожденных подмодулей M не превосходит c).

в) Если M голономен, то его длина не превосходит $m(M)$ (в частности, M цикличен).

Дальнейшие примеры голономных модулей см. ниже в п. 1.14.

1.13. Двойственность для голономных модулей. Для каждого левого (соответственно, правого) голономного A_n-модуля M положим

$$M^* = \mathrm{Ext}^n_{A_n}(M, A_n).$$

Это правый (соответственно левый) A_n-модуль, который называется *двойственным* к M. Его свойства:

а) M^* является голономным A_n-модулем.

б) $M \mapsto M^*$ является точным функтором из категории левых (соответственно правых) голономных A_n-модулей в категорию правых (соответственно левых) голономных модулей, задающим антиэквивалентность этих категорий.

Утверждение а) следует, по существу, из (1), утверждение б) — из точной последовательности Ext'ов.

1.14. Еще примеры и свойства голономных модулей.

а) Пусть $f \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ и $M = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, f^{-1}]$ с действием A_n, определяемым формальным дифференцированием рациональных функций. Тогда M голономен (для доказательства нужно положить $\Gamma_j = \{q(x) f(x)^{-j}, \deg q \leqslant j(\deg f + 1)\}$ и применить б)). При этом $\bigcup \Gamma_j = M$ вытекает из того, что $q f^{-j} \in \Gamma_{j+\deg q}$).

б) Более общо, пусть M голономен. Тогда $M[f^{-1}] \overset{\mathrm{def}}{=} M \underset{\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]}{\otimes} \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, f^{-1}]$ также голономен.

в) Отметим, что хотя голономные A_n-модули являются, в некотором смысле, «самыми маленькими» модулями, существуют простые неголономные A_n-модули M. Два типа примеров построены Стаффордом [1.3.7] и И. Н. Бернштейном и В. Лунцем. В обоих случаях $n=2$ и $M = A_2/A_2P$ (так что $d(M)=3$). В первой работе $P = x_1 + x_2 + \partial_1 + x_1\partial_1\partial_2$, во второй — P — однородный (по x_1, x_2, ∂_1, ∂_2) элемент степени $k \geqslant 4$ общего положения.

1.15. Полином Бернштейна. Пусть $f \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ и λ — транцендентная переменная над $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим алгебру Вейля $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$ над полем рациональных функций от λ. Построим модуль $N = \mathbf{C}(\lambda)[x_1, \ldots, x_n, f^{-1}] f^{\lambda}$ над $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$, порожденный над $\mathbf{C}(\lambda)[x_1, \ldots, x_n, f^{-1}]$ одной образующей f^{λ}, на которую элементы ∂_j действуют формальным дифференцированием: $\partial_j f^{\lambda} = \lambda f^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} f^{\lambda}$. Вводя в N фильтрацию аналогично п. 1.14. г, можно убедиться, что N — голономный $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$-модуль.

Пусть $N_j \subset N$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ — $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$-подмодуль, порожденный $f^j f^{\lambda}$. Поскольку N имеет конечную длину, $N_k = N_{k+1}$ для некоторого k, то есть

$$f^k f^{\lambda} = P_1(\lambda) f^{k+1} f^{\lambda}, \quad P_1(\lambda) \in A_n(\mathbf{C}(\lambda)).$$

Заменяя λ на $\lambda - k$ (λ транцендентно!), получим

$$f^{\lambda} = P_1(\lambda - k) f^{\lambda+1}.$$

Пусть $B(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]$ — общий знаменатель всех коэффициентов (лежащих в $\mathbf{C}(\lambda)$) оператора $P_1(\lambda - k)$ и $P(\lambda) = B(\lambda) P_1(\lambda - k)$. Тогда

$$P(\lambda) f^{\lambda+1} = B(\lambda) f^{\lambda}, \quad P(\lambda) \in A_n(\mathbf{C}[\lambda]), \quad B(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]. \tag{2}$$

Существование таких $P(\lambda)$ и $B(\lambda)$ называется теоремой Бернштейна. Ясно, что всевозможные $B(\lambda)$ (для данного f) образуют идеал в $\mathbf{C}[\lambda]$. Образующая $b(\lambda)$ этого идеала, имеющая старший коэффициент 1, называется *полиномом Бернштейна* для f.

Отметим, что из (2) вытекает, что $N = N_0$, то есть N порождается f^{λ} над $A_n(\mathbf{C})$.

1.15.1. Теорема. Пусть $f \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда

$$M = A_n(\mathbf{C})[\lambda] f^{\lambda} / A_n(\mathbf{C})[\lambda] f \cdot f^{\lambda}$$

является голономным $A_n(\mathbf{C})$-модулем, и минимальный полином оператора умножения на λ есть b.

§ 2. Алгебраические $\mathscr{D}$-модули

В дальнейшем в этой главе (если не оговорено противного) под многообразием X будет пониматься гладкое алгебраическое комплексное многообразие.

2.1. Пучок $\mathscr{D}_X$. Пусть $U \subset X$ — открытое множество. Дифференциальным оператором порядка $\leqslant n$ на U называется линейное отображение $P: \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$, удовлетворяющее условию

$$[[[P, f_1], f_2], \ldots, f_{n+1}] = 0$$

для любых $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{O}_X(U)$.

Обозначим множество дифференциальных операторов порядка $\leqslant n$ на U через $\mathcal{D}_X(U)(n)$. Объединение $\mathcal{D}_X(U)=\bigcup_n \mathcal{D}_X(U)(n)$ является кольцом, которое называется *кольцом алгебраических дифференциальных операторов* на U. Возрастающее семейство подпространств

$$\{0\}=\mathcal{D}_X(U)(-1)\subset\mathcal{D}_X(U)(0)\subset\ldots$$

задают на $\mathcal{D}_X(U)$ структуру фильтрованного кольца.

Имеем $\mathcal{D}_X(U)(0)=\mathcal{O}_X(U)$ (операторы умножения на функцию). Далее, любой элемент $\mathcal{D}_X(U)(1)$ представляется (однозначно) в виде $P=\theta+f$, где $f\in\mathcal{D}_X(U)(0)$, θ — векторное поле на U, то есть $\mathbf{C}$-дифференцирование кольца $\mathcal{O}_X(U)$.

Если U аффинно, то $\mathcal{D}_X(U)$ порождается $\mathcal{D}_X(U)(1)$. Если $V\subset U$ — оба аффинны, то

$$\mathcal{D}_X(V)=\mathcal{O}_X(V)\underset{\mathcal{O}_X(U)}{\otimes}\mathcal{D}_X(U).$$

Отсюда вытекает, что на X существует единственный $\mathcal{O}_X$-квазикогерентный пучок колец $\mathcal{D}$, сечения которого над каждым аффинным открытым $U\subset X$ совпадают с $\mathcal{D}_X(U)$. Этот пучок называется *пучком ростков алгебраических дифференциальных операторов на* X. Аналогично определяются подпучки $\mathcal{D}_X(n)$, задающие на $\mathcal{D}_X$ структуру пучка фильтрованных колец. При этом $\mathcal{D}_X(0)=\mathcal{O}_X$ и каждый $\mathcal{D}_X(n)$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-модулем.

Если $X=\mathbf{C}^n$ — n-мерное аффинное пространство, то $\mathcal{D}_X(X)$ совпадает с алгеброй Вейля $A_n(\mathbf{C})$ (∂_i есть векторное поле $\partial/\partial x_i$). В частности, $\mathcal{D}_X(X)$ порождается $\mathcal{O}_X(X)$ и попарно коммутирующими всюду линейно независимыми векторными полями. Можно показать, что последнее утверждение справедливо локально в топологии Зарисского для любого гладкого X.

2.2. $\mathcal{D}_X$-модули. Обозначим через $\mathcal{M}_X$ абелеву категорию пучков (левых) модулей над пучком колец $\mathcal{D}_X$.

Примеры $\mathcal{D}_X$-модулей: а) $M=\mathcal{O}_X$.

б) $M=\mathcal{D}_X$ (левое умножение).

в) *Плоские связности.* Связностью ∇ на квазикогерентном $\mathcal{O}_X$-модуле M называется действие на M пучка Θ_X векторных полей, $\xi\mapsto\nabla_\xi$, которое $\mathcal{O}_X$-линейно

$$\nabla_{f\xi+g\eta}=f\nabla_\xi+g\nabla_\eta,\ f,\ g\in\mathcal{O}_X,\ \xi,\ \eta\in\Theta_X$$

и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_\xi(fm)=(\xi f)m+f\nabla_\xi m,\ m\in M,\ \xi\in\Theta_X,\ f\in\mathcal{O}_X.$$

Связность ∇ называется *плоской*, если

$$[\nabla_\xi,\ \nabla_\eta]=\nabla_{[\xi,\eta]}.$$

Легко видеть, что задание на M структуры $\mathcal{D}_X$-модуля эквивалентно заданию на M плоской связности ∇.

Обычно плоские связности задаются на локально свободных $\mathcal{O}_X$-модулях конечного ранга (то есть на пучках ростков сечений алгебраических векторных расслоений). Следующее предложение характеризует такие пучки.

2.3. Предложение. $\mathcal{D}_X$-модуль является $\mathcal{O}_X$-когерентным тогда и только тогда, когда он локально свободен конечного ранга над $\mathcal{O}_X$.

Доказательство. Это — локальный вопрос. Пусть $x \in X$ и $s_1, \ldots, s_p$ — такие сечения M в некоторой окрестности x, что их образы в конечномерном векторном пространстве $\overline{M}_x = M_x/\mathfrak{m}_x M_x$ (где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал точки x) задают базис в $\overline{M}_x$. По лемме Накаямы, s_i порождают M над $\mathcal{O}_X$ в некоторой окрестности точки x. Нужно лишь проверить, что s_i линейно независимы над $\mathcal{O}_X$. Если

$$\Sigma \varphi_i s_i = 0, \quad \varphi_i \in \mathcal{O}_X \tag{1}$$

— линейное соотношение между s_i, то $\varphi_i(x) = 0$ для всех i. Выберем среди всех соотношений (1) такое, у которого $\nu = \min\limits_i \{$порядок нуля φ_i в точке $x\}$ минимален. Пусть в этом соотношении, скажем, $\nu = \operatorname{ord} \varphi_1$. Легко видеть, что существует локальное векторное поле ∂ на X, для которого $\operatorname{ord}(\partial\varphi_1) = \nu - 1$. Тогда

$$0 = \partial\left(\sum \varphi_i s_i\right) = (\partial\varphi_1)\, s_i + \sum_{i=2}^{p} \partial\varphi_i \cdot s_i.$$

Разлагая ∂s_i по s_i, получим соотношение

$$\sum \psi_i s_i = 0$$

с $\operatorname{ord} \psi_1 = \nu - 1$, что противоречит выбору ν.

2.4. Пучок Ω_X. Левые и правые $\mathcal{D}$-модули. Обозначим через $\mathcal{M}_X^R$ категорию правых $\mathcal{D}_X$-модулей, квазикогерентных как $\mathcal{O}_X$-модули. Естественный способ перехода от $\mathcal{M}_X$ к $\mathcal{M}_X^R$ и обратно состоит в следующем.

Пусть Ω_X — пучок ростков алгебраических дифференциальных форм старшей ($= \dim X$) степени на X. Он локально свободен ранга 1 над $\mathcal{O}_X$. Векторное поле ξ на X действует на Ω_X производной Ли L_ξ. Имеем

$$\begin{gathered} [L_\xi, L_\eta] = L_{[\xi, \eta]}, \\ L_{f\xi}\omega = fL_\xi\omega - L_\xi(f\omega). \end{gathered} \tag{2}$$

Эти формулы показывают, что Ω_X является правым $\mathcal{D}_X$-модулем относительно действия:

$$\omega \cdot \xi = -L_\xi \omega, \quad \omega \circ f = f\omega.$$

Теперь для любого $\mathcal{F}\in\mathcal{M}_X$ положим

$$\Omega(\mathcal{F})=\mathcal{F}\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\Omega_X$$

и зададим правое действие $\mathcal{D}_X$ на $\Omega(\mathcal{F})$, полагая

$$(u\otimes\omega)\,f=fu\otimes\omega=u\otimes f\omega,\quad f\in\mathcal{O}_X,$$
$$(u\otimes\omega)\,\xi=-\xi u\otimes\omega-u\otimes L_\xi\omega,\quad \xi\in\Theta_X.$$

Формулы (2) показывают, что $\Omega(\mathcal{F})\in\mathcal{M}_X^R$.

Легко проверить, что Ω задает эквивалентность категорий $\mathcal{M}_X$ и $\mathcal{M}_X^R$. Квазиобратный функтор имеет вид

$$\mathcal{G}\mapsto\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X,\mathcal{G})=\mathcal{G}\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\Omega_X^{-1}.$$

2.5. Когерентные $\mathcal{D}_X$-модули. Напомним, что, согласно общему определению, $\mathcal{D}_X$-модуль M называется когерентным, если он локально представляется как коядро морфизма свободных $\mathcal{D}_X$-модулей конечного ранга. Обозначим полную подкатегорию $\mathcal{M}_X$, состоящую из когерентных модулей, через Coh_X.

2.5.1. Теорема. а) Пучок колец $\mathcal{D}_X$ когерентен и локально нетеров.

б) Гомологическая размерность слоя $\mathcal{D}_{X,x}$ в каждой точке $x\in X$ равна $\dim X$; гомологическая размерность $\mathcal{D}_X$ не превосходит $2\dim X$.

Утверждение (i) следует из общих свойств фильтрованных колец (и пучков колец). Первая часть (ii) вытекает из аналогичного результата для алгебры Вейля A_n (см. п. 1.11), вторая часть следует из первой теоремы Серра—Гротендика о когомологиях X и спектральной последовательности, отвечающей композиции функторов $\mathrm{Hom}=\Gamma\circ\mathcal{H}om$.

2.6. Характеристическое многообразие. Градуированный пучок колец $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$, связанный с фильтрацией $\{\mathcal{D}_X(n)\}$ на $\mathcal{D}_X$, изоморфен, очевидно, пучку $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X}^{\mathrm{pol}})$, где T^*X — кокасательное расслоение к X, $\pi: T^*X\to X$ — проекция, $\mathcal{O}_{T^*X}^{\mathrm{pol}}$ — пучок регулярных функций на T^*X, полиномиальных вдоль слоев π.

Пусть $M\in\mathrm{Coh}_X$ и x — точка X. Аналогично п. 1.4.1, а), можно утверждать, что в некоторой аффинной окрестности U точки x у $M(U)$ существует хорошая фильтрация относительно фильтрации $\{\mathcal{D}_X(n)(U)\}$ на $\mathcal{D}(U)$. Соответствующий градуированный модуль $\mathrm{gr}\,M(U)$ конечно порожден над $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X(U)=\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X}^{\mathrm{pol}})(U)$. Подмногообразие $(\mathrm{ch}\,M)|_U\subset\pi^{-1}(U)$, определяемое идеалом $J=\sqrt{\mathrm{ann}\,\mathrm{gr}\,M(U)}$, не зависит от выбора хорошей фильтрации (аналогично 1.5). Поэтому $(\mathrm{ch}\,M)|_U$ над различными $U\subset X$ склеиваются в подмногообразие $\mathrm{ch}\,M\subset T^*X$, называемое *характеристическим многообразием* когерентного $\mathcal{D}_X$-модуля M.

Для $x \in X$ обозначим через $d_x(M)$ величину $\inf\limits_{U \ni x} \dim (\operatorname{ch} M \cap \cap \pi^{-1}(U))$, и через $j_x(M)$ — наименьшее j, для которого $\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{D}_{X,x}}(M_x, \mathcal{D}_{X,x}) \neq 0$.

2.7. Теорема. (а) $\operatorname{ch} M$ — коническое подмногообразие T^*X (то есть $\operatorname{ch} M$ инвариантно относительно растяжений в слоях $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$).

б) $j_x(M) + d_x(M) = 2 \dim X$.

в) Если $M_x \neq \{0\}$, то $d_x(M) \geqslant \dim X$.

г) $\operatorname{ch} M$ инволютивно (то есть касательное пространство к $\operatorname{ch} M$ в каждой гладкой точке содержит свое ортогональное дополнение относительно стандартной симплектической структуры в T^*X).

Часть (а) очевидна, части б), в) следуют из соответствующих утверждений для алгебры Вейля. Часть (г) — это трудная теорема Стернберга—Гийемина—Мальгранжа—Габбера—Сато—Каваи—Каширавы. В настоящее время известны доказательство Сато—Каширавы—Каваи [127], доказательство Мальгранжа [113] (см. [27]), в котором исследуется действие на пучок колец $\mathcal{D}_X$ общих симплектических преобразований T^*X, и его перевод на алгебраический язык, данный Габбером [63].

в) Если $M_x \neq \{0\}$, то $d_x(M) \geqslant \dim X$.

2.8. Примеры. а) $M = \mathcal{D}_X$, $\operatorname{ch} M = T^*X$;

б) $M = \mathcal{O}_X$, $\operatorname{ch} M = X \subset T^*X$ (нулевое сечение);

в) M — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{E}$ конечного ранга, снабженный плоской связностью, $\operatorname{ch} M \subset X$ — носитель $\mathcal{E}$ (совпадающий с G, если X неприводимо);

г) $M = \mathcal{D}_X / \mathfrak{m}_x \mathcal{D}_X$, $x \in X$ (обобщенные функции, сосредоточенные в точке x, ср. 1.1б) $\operatorname{ch} M = \pi^{-1}(x)$ — слой над x.

2.9. Производные категории. Большинство конструкций и результатов теории $\mathcal{D}_X$-модулей наиболее естественно формулируются и доказываются в контексте производных категорий. Обозначим через $D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$, $D^b(\mathcal{M}_X)$, $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ соответственно ограниченные производные категории абелевых категорий всех (левых) $\mathcal{D}_X$-модулей, $\mathcal{O}_X$-квазикогерентных $\mathcal{D}_X$-модулей и $\mathcal{D}_X$-когерентных модулей. Ясно, что вложения $\mathrm{Coh}_X \to \mathcal{M}_X \to \mathcal{D}_X\text{-mod}$ задают функторы

$$D^b(\mathrm{Coh}_X) \to D^b(\mathcal{M}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod}). \tag{3}$$

Обозначим через $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ и $D^b_{\mathrm{Coh}}(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ — полные подкатегории в $D_b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$, состоящие из комплексов, когомологии которых принадлежат соответственно $\mathcal{M}_X$ и Coh_X.

2.10. Теорема. Функторы $\alpha: D^b(\mathrm{Coh}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ и $\beta: D^b(\mathcal{M}_X) \to D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ задают эквивалентности триангулированных категорий

$$D^b(\mathrm{Coh}_X) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathrm{Coh}}(\mathcal{D}_X\text{-mod}),$$
$$D^b(M_X) \xrightarrow{\sim} D^b_{qc}(\mathcal{D}_X\text{-mod}).$$

Доказательство второго утверждения было получено И. Н. Бернштейном. Его основные этапы таковы.

Легко видеть, что $\mathcal{O}_X$-квазикогерентные $\mathcal{D}_X$-модули порождают $D^b_{qc}(\mathcal{D}_X\text{-mod})$, так что нужно лишь проверить, что β — строго полный функтор, то есть

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{M}_X)}(\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{G}^\cdot) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}_{X\text{-mod}})}(\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{G}^\cdot)$$

для любых $\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{G}^\cdot \in \mathrm{Ob}\, D^b(\mathcal{M}_X)$. На самом деле, аналогичное равенство справедливо для $R\,\mathrm{Hom}$ вместо Hom. Проверка сперва сводится к случаю, когда X аффинно. Затем, используя подходящие резольвенты для $\mathcal{F}^\cdot$ и $\mathcal{G}^\cdot$, все сводится к случаю, когда $\mathcal{F}^\cdot$ и $\mathcal{G}^\cdot$ — комплексы, сосредоточенные в одной степени, причем $\mathcal{F}$ свободен, а $\mathcal{G}$ инъективен. После этого утверждение следует из теоремы Серра о когомологиях квазикогерентных пучков на аффинных многообразиях.

Доказательство первого утверждения следует из того, что каждый объект из $\mathcal{M}_X$ является индуктивным пределом своих подобъектов, лежащих в Coh_X.

2.11. Резольвенты. Для вычисления различных функторов между производными категориями $\mathcal{D}_X$-модулей полезно знать условия, гарантирующие наличие подходящих резольвент. Нужные результаты здесь таковы:

а) Каждый объект $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$ имеет правую инъективную резольвенту

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1 \to \ldots \to \mathcal{I}^m \to 0$$

с $m \leqslant 2\dim X + 1$.

б) Предположим, что X квазипроективно и $m \geqslant \dim X$. Каждый объект $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_X$ имеет левую резольвенту

$$0 \to \mathcal{P}^m \to \mathcal{P}^{-m+1} \to \ldots \to \mathcal{P}^0 \to \mathcal{F} \to 0,$$

в которой $\mathcal{P}^{-i}$ локально свободны для $0 \leqslant i \leqslant m-1$, а $\mathcal{P}^{-m}$ локально проективен.

Стандартные рассуждения с производными категориями показывают, что у любого $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}\, D^b(\mathcal{M}_X)$ существуют ограниченная правая инъективная резольвента, ограниченная левая проективная резольвента и ограниченная левая плоская (над $\mathcal{D}_X$) резольвента.

2.11.1. Комплекс де Рама. Для любого $\mathcal{D}_X$-модуля M *комплекс де Рама* $\Omega^\cdot(M)$, связанный с M, есть комплекс

$$\Omega^\cdot(M): 0 \to M \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} M \to \ldots \to \Omega_X^{\dim X} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} M \to 0,$$

где Ω_X^i — пучок ростков алгебраических i-форм на X. Дифференциал d^i задается в локальных координатах формулой

$$d^i(\omega \otimes m) = d\omega \otimes m + \sum_l (dx_l \wedge \omega) \otimes \frac{\partial}{\partial x_l} m.$$

Легко проверить, что d^i не зависит от выбора локальных координат и что $d^{i+1}d^i = 0$.

В частности, рассматривая комплекс де Рама $\Omega^\cdot(\mathscr{D}_X)$, получаем (после сдвига на $\dim X$) левую резольвенту $\Omega_X = \Omega_X^{\dim X}$, состоящую из локально свободных правых $\mathscr{D}_X$-модулей: $\Omega^\cdot(\mathscr{D}_X)[\dim X]$:

Эта резольвента называется *резольвентой де Рама.*

В заключение этого параграфа мы опишем аналог понятия аффинного многообразия в контексте категории $\mathscr{D}$-модулей.

2.12. Определение. Многообразие X называется *$\mathscr{D}$-аффинным,* если функтор $\mathscr{F} \to \Gamma(X, \mathscr{F})$ точен на категории $\mathscr{M}_X$.

Формальные рассуждения (аналогичные использующимся в алгебраической геометрии при описании $\mathcal{O}_X$-модулей на аффинных схемах) показывают, что для $\mathscr{D}$-аффинного многообразия X имеем:

(i) Любой пучок $\mathscr{F} \in \mathscr{M}_X$ порождается своими глобальными сечениями.

(ii) $\mathscr{D}_X$ является проективной образующей $\mathscr{M}_X$.

Ясно, что любое аффинное многообразие $\mathscr{D}$-аффинно. Существуют, однако, важные примеры $\mathscr{D}$-аффинных многообразий, которые не аффинны.

2.12.1. Теорема. Пусть Y — многообразие флагов комплексной полупростой группы Ли G (то есть $Y = G/P$, где $P \subset G$ — параболическая подгруппа) и Z — аффинное многообразие. Тогда $X = Z \times Y$ — $\mathscr{D}$-аффинно.

В частности, $\mathscr{D}$-аффинным является проективное пространство $P^n(\mathbf{C})$.

2.12.2. Связь с теорией представлений. Пусть снова $Y = G/P$ — пространство флагов полупростой комплексной группы Ли G. Группа G действует на Y, так что мы получаем гомоморфизм τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли Θ глобальных векторных полей на Y, продолжающийся до гомоморфизма $\bar{\tau}: U(\mathfrak{g}) \to \mathscr{D}_Y(Y)$ обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ в алгебру глобальных дифференциальных операторов на Y. Несложно доказать (либо одновременно с п. 2.12.1, либо непосредственно), что $\bar{\tau}$ эпиморфно, так что любой глобальный дифференциальный оператор на Y порождается константами и $\tau(\mathfrak{g})$. Кроме того, несложно описать ядро $\bar{\tau}$.

Вместе с теоремой п. 2.12.1 это дает возможность свести исследование $U(\mathfrak{g})$-модулей (то есть представлений G), ядро которых содержит ядро τ, к исследованию $\mathscr{D}_Y$-модулей.

§ 3. Обратный образ

3.1. Об обозначениях. В дальнейшем нам нужно будет работать с прямыми и обратными образами в различных категориях пучков (абелевых групп, $\mathcal{O}$-модулей, $\mathcal{D}$-модулей).

Пусть $f: X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий. Категории пучков на X и Y связаны между собой следующими функторами:

а) Пучки абелевых групп (в комплексно-аналитической) топологии:

$$f_{\cdot}: \mathcal{S}\mathcal{A}b_X \to \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y \text{ (прямой образ)},$$

$$f^{\cdot}: \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y \to \mathcal{S}\mathcal{A}b_X \text{ (обратный образ)},$$

$$f_!: \mathcal{S}\mathcal{A}b_X \to \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y \text{ (прямой образ с компактным носителем)},$$

$$f^!: D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_Y) \to D^b(\mathcal{S}\mathcal{A}b_X) \text{ (экстраординарный обратный образ)},$$

Через $Rf_{\cdot}$, $Rf_!$, $f^{\cdot}$ обозначаются соответствующие функторы между производными категориями (напомним, что $f_{\cdot}$, $f_!$ точны слева, а $f^{\cdot}$ точен). Все четыре функтора сохраняют подкатегории конструктивных пучков.

б) Пучки $\mathcal{O}$-модулей

$$f_*: \mathcal{O}_X\text{-mod} \to \mathcal{O}_Y\text{-mod} \text{ (прямой образ)},$$

$$f^*: \mathcal{O}_Y\text{-mod} \to \mathcal{O}_X\text{-mod} \text{ (обратный образ)}.$$

Здесь $f_* = f_{\cdot}$ точен слева, f^* точен справа, соответствующие производные функторы обозначаются Rf_*, Lf^*.

3.2. Действие векторных полей на $f^*(M)$. Пусть $M \in \mathcal{M}_Y$. Рассматривая M как $\mathcal{O}_Y$-модуль, мы можем определить $f^*(M)$. Наша цель в этом пункте — превратить $f^*(M)$ в $\mathcal{D}_X$-модуль. Для этого достаточно задать на $f^*(M)$ действие векторных полей на X. Мы сделаем это локально по Y. Пусть $x \in X$, $y = f(x)$. В некоторой окрестности y можно найти систему из $d_Y = \dim Y$ функций y_i и d_Y попарно коммутирующих векторных полей ∂_i таких, что дифференциалы y_i в y линейно независимы (так что y_i являются локальными координатами в некоторой аналитической окрестности y), и $[\partial_i, y_j] = \delta_{ij}$ (так что $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$).

Теперь для векторного поля ξ на Y и сечения $\gamma = \varphi \otimes f^{\cdot} m$ пучка $f^*(M) = \mathcal{O}_X \underset{f^{\cdot}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{\cdot} M$ положим

$$\xi\gamma = \xi\varphi \otimes f^{\cdot} m + \sum_i \varphi\xi (y_i \circ f) \otimes f^{\cdot}(\partial_i m). \qquad (1)$$

Легко проверить, что это определение корректно: $\xi(\varphi f^{\cdot}(\psi) \otimes \otimes f^{\cdot}(m)) = \xi(\varphi \otimes f^{\cdot}(\psi m))$, $\psi \in \mathcal{O}_Y$, и не зависит от выбора системы (y_i, ∂_i). Чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, нужно выразить в некоторой аналитической окрестности точки y одну систему локальных координат через другую, и использовать формулу Лейбница.

Отметим, что формула (1) абсолютно естественна: она выражает тот факт, что если ξ касательно к слоям f, то $\xi(1\otimes f^{\cdot}m)=0$.

3.3. Лемма. (i) Описанное действие векторных полей превращает $f^*(M)$ в $\mathcal{D}_X$-модуль; обозначим его $f^{\nabla}(M)$.

(ii) $M\mapsto f^{\nabla}(M)$ задает функтор $f^{\nabla}:\mathcal{M}_Y\to\mathcal{M}_X$, который точен справа.

(iii) Если $g:Y\to Z$ — другой морфизм, то $(gf)^{\nabla}=f^{\nabla}g^{\nabla}$; кроме того, $\mathrm{id}^{\nabla}=\mathrm{Id}$.

Доказательство всех этих утверждений сводится к несложным проверкам.

3.4. Пучок $\mathcal{D}_{X\to Y}$. Положим

$$\mathcal{D}_{X\to Y}=f^{\nabla}(\mathcal{D}_Y)=\mathcal{O}_X\underset{f^{\cdot}(\mathcal{O}_Y)}{\otimes}f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y).$$

Этот пучок является левым $\mathcal{D}_X$-модулем и правым $f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y)$-модулем С его помощью $f^{\nabla}(M)$, $M\in\mathcal{M}_Y$, можно определить следующим образом:

$$f^{\nabla}(M)=\mathcal{D}_{X\to Y}\underset{f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y)}{\otimes}f^{\cdot}(M).$$

Свойство (iii) при этом эквивалентно утверждению

$$\mathcal{D}_{X\to Z}=\mathcal{D}_{X\to Y}\underset{f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y)}{\otimes}f^{\cdot}(\mathcal{D}_{Y\to Z}). \tag{2}$$

3.5. Функтор f^D. Переходя к производной категории, мы получим функтор $Lf^{\nabla}:D^b(\mathcal{M}_Y)\to D^b(\mathcal{M}_X)$, который, очевидно, задается формулой

$$Lf^{\nabla}(M^{\cdot})=\mathcal{D}_{X\to Y}\overset{L}{\underset{f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y)}{\otimes}}f^{\cdot}(M^{\cdot})$$

(поскольку $f^{\cdot}$ точен). По многим причинам оказывается, однако более удобным сдвинуть степень (и изменить обозначение) и рассматривать функтор $f^D:D^b(\mathcal{M}_Y)\to D^b(\mathcal{M}_X)$, задаваемый формулой

$$f^D(M^{\cdot})=\mathcal{D}_{X\to Y}\overset{L}{\underset{f^{\cdot}(\mathcal{D}_Y)}{\otimes}}f^{\cdot}(M^{\cdot})[d_{X,Y}]$$

($d_{X,Y}=\dim X-\dim Y$). Если $M\in\mathcal{M}_Y$, то для когомологий комплекса $f^D(M)$ имеем две формулы

$$H^i(f^D(M)) = \operatorname{Tor}_{i-d_{X,Y}}^{\cdot(\mathcal{D}_Y)}(\mathcal{D}_{X\to Y},\ f^{\cdot}(M)),$$

$$H^i(f^D(M)) = \operatorname{Tor}_{i-d_{X,Y}}^{f^{\cdot}(\mathcal{O}_Y)}(\mathcal{O}_X,\ f^{\cdot}(M)).$$

3.6. Предложение. В ситуации леммы п. 3.3 (iii) имеем $(gf)^D = f^D g^D$, $\mathrm{id}^D = \mathrm{Id}$.

Доказательство использует п. 3.3 (iii) и определение производных функторов через плоские резольвенты.

3.7. Примеры. а) $f: X \to Y$ — открытое вложение. В этом случае легко проверить, что $f^{\nabla}(M) = f^{\cdot}(M) = M_X$ (как модуль над $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_Y|_X$), так что f^{∇} — точный функтор и $f^D = Lf^{\nabla} = f^{\nabla}$. Функтор f^D переводит когерентные $\mathcal{D}$-модули в когерентные и голономные $\mathcal{D}$-модули в голономные.

б) Пусть $X = Y \times Z$, $f: X \to Y$ — проекция на первый сомножитель. Обозначим через $g: X \to Z$ проекцию на второй сомножитель. Имеем

$$\mathcal{D}_X = f^{\cdot}\mathcal{D}_Y \underset{\mathbf{C}}{\otimes} g^{\cdot}\mathcal{D}_Z. \qquad (3)$$

Легко проверить, что $f^{\nabla}(M) = M \underset{\mathbf{C}}{\otimes} g^{\cdot}\mathcal{O}_Z$ со структурой $\mathcal{D}_X$-модуля, определяемого разложением (3). Поэтому f^{∇} точен. Отсюда f^D совпадает с f^{∇} с точностью до сдвига на $d_Z = \dim Z$, то есть

$$H^i(f^D(M^{\cdot})) = f^{\nabla}(H^{i+d_Z}(M^{\cdot})), \quad M^{\cdot} \in D^b(\mathcal{M}_X).$$

Снова легко проверить, что f^{∇} сохраняет когерентность и голономность.

в) Наиболее интересный случай замкнутого вложения будет рассмотрен в конце следующего параграфа (теорема Касивары).

§ 4. Прямой образ

4.1. Прямой образ правых $\mathcal{D}$-модулей. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий. Основная трудность при определении прямого образа $\mathcal{D}$-модулей вызвана тем, что f, вообще говоря, не задает морфизма окольцованных пространств $(X, \mathcal{D}_X) \to (Y, \mathcal{D}_Y)$ (в противоположность ситуации с $\mathcal{O}$-модулями). Однако, как для любого пучка колец на Y, f задает морфизм окольцованных пространств

$$\tilde{f}: (X,\ f^{\cdot}\mathcal{D}_Y) \to (Y,\ \mathcal{D}_Y),$$

который мы и будем использовать для определения прямого образа $\mathcal{D}$-модулей. Сперва мы дадим более естественное определение прямого образа для правых $\mathcal{D}$-модулей (относительно левых модулей см. п. 4.5). При этом с самого начала нужно работать в производных категориях.

4.2. Определение. Для $N^{\cdot} \in D^b(\mathcal{M}_X^R)$ положим

$$f_+^{(R)} N^{\cdot} = R\tilde{f}_{.}(N^{\cdot} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\to Y}).$$

Здесь $\mathcal{D}_{X\to Y}$ — $(\mathcal{D}_X - f^{\cdot}\mathcal{D}_Y)$-бимодуль, определенный в п. 3.5.

4.3. Свойства $f_+^{(R)}$. а) $f_+^{(R)}$ задает точный функтор триангулированных категорий $D^b(\mathcal{M}_X^R) \to D^b(\mathcal{M}_Y^R)$. Для доказательства нужно проверить, что $f_+^{(R)}(M)$ имеет $\mathcal{O}$-квазикогерентные когомологии. Это сперва делается в случае, когда X и Y аффинны (используя свободную левую резольвенту $N^{\cdot}$); переход к общему случаю осуществляется с помощью спектральной последовательности Чеха для аффинного покрытия $f^{-1}(U)$, $U \subset Y$ аффинно. Остальные утверждения в а) очевидны.

б) В ситуации $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ имеем

$$(g \circ f)_+^{(R)} = g_+^{(R)} \circ f_+^{(R)}.$$

Доказательство использует формулу типа формулы проекции, связывающую $R\tilde{f}_{.}$ и $f^{\cdot}$, изоморфизм (2) из §3, и формулу

$$R\,(\widetilde{g \circ f})_{.} = R\tilde{g}_{.} \circ R\tilde{f}_{.}:$$

4.4. Замечания. Функтор $f_+^{(R)}$ является композицией левого производного функтора $\cdot \overset{L}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y}$ и правого производного функтора $R\tilde{f}_{.}$. Именно по этой причине его нельзя хорошо определить вне контекста производных категорий. В частности, $f_+^{(R)}$ не является, вообще говоря, производным функтором ни от своей нулевой когомологии $H^0(f_+^{(R)})$, ни от функтора $N \to \tilde{f}_{.}(N \otimes \mathcal{D}_{X\to Y})$ (и эти два функтора, вообще говоря, различны). Кроме того, ни один из этих двух функторов не обладает свойством, аналогичным п. 4.3 б).

4.5. Прямой образ левых $\mathcal{D}$-модулей. Переход к левым $\mathcal{D}$-модулям осуществляется с помощью конструкции п. 2.5. Для этого удобно ввести пучок $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ на X, являющийся левым $f^{\cdot}\mathcal{D}_Y$-модулем и правым $\mathcal{D}_X$-модулем. А именно, положим $\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_Y^r \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^{-1}$, где $\mathcal{D}_Y^r$ — пучок $\mathcal{D}_Y$, рассматриваемый как правый $\mathcal{D}_Y$-модуль относительно присоединенного действия. Согласно п. 2.5, $\mathcal{D}_Y$ имеет два коммутирующих структуры левого $\mathcal{D}_Y$-модуля: возникающую из п. 2.5 (структура 1) и возникающая из левого присоединенного действия на $\mathcal{D}_Y$ (структура 2). Далее, пусть

$$\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}=\Omega_X \underset{f^{\cdot}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{\cdot}\mathscr{D}_Y,$$

где тензорное произведение берется по структуре 2.

Структура левого $f^{\cdot}\mathscr{D}_Y$-модуля на $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}$ возникает из структуры 1 на $\mathscr{D}_Y$. Структура правого $\mathscr{D}_X$-модуля возникает из структуры левого $\mathscr{D}_X$-модуля на

$$f^{\nabla}(\mathscr{D}_Y)=\mathcal{O}_X \underset{f^{\cdot}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{\cdot}\mathscr{D}_Y,$$

отвечающей структуре 2, и последующего применения п. 2.5.

Теперь положим для $M^{\cdot}\in D^b(\mathscr{M}_X)$

$$f_+M^{\cdot}=R\tilde{f}.\left(\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}\overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} M^{\cdot}\right).$$

Легко проверить, что это определение прямого образа для левых $\mathscr{D}$-модулей согласуется с определением п. 4.2 для правых $\mathscr{D}$-модулей. Кроме того, ясно, что f_+ является функтором $D^b(\mathscr{M}_X)\to D^b(\mathscr{M}_Y)$ и для $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ имеем

$$(g\circ f)_+=g_+\circ f_+. \tag{1}$$

4.6. Прямой образ для открытых вложений. Пусть $f:X\to Y$ — открытое вложение. Тогда $\Omega_X=\Omega_{Y|X}$, $\mathscr{D}_X=\mathscr{D}_{Y|X}$ и $\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}=\mathscr{D}_X$ как $(\mathscr{D}_Y, \mathscr{D}_X)$-модуль, так что f задает морфизм окольцованных пространств $f:(X, \mathscr{D}_X)\to(Y, \mathscr{D}_Y)$. Поэтому f_+ задается формулой

$$f_+=Rf.=Rf_*,$$

то есть f_+ является правым производным точного слева функтора $f.$. Отсюда и из п. 3.6 вытекает, что f_+ сопряжен слева к f^D, так, что существует канонический морфизм функторов $\mathrm{Id}:f_+f^D$

Далее, для $M\in\mathscr{M}_X$ имеем

$$H^if_+(M)=0 \text{ при } i<0,$$

$$H^if_+(M)_x=\varinjlim_{U\ni x} H^i(X\cap U, M),\quad x\in X \text{ при } i\geqslant 0,$$

где U пробегает систему аффинных окрестностей точки x.

Если X аффинно, то f_* — точный функтор, так что $f_+=Rf_*=f_*$ и

$$H^if_+(M)=\begin{cases} M & \text{при } i=0,\\ 0 & \text{при } i\neq 0.\end{cases}$$

Отметим, что f_+ для открытых вложений, вообще говоря, не сохраняет когерентность над $\mathscr{D}$ (пример: X — дополнение к гиперповерхности в Y); см. однако, п. 4.10 в) и п. 5.6.1.

4.7. Прямой образ для гладкого морфизма. Для гладкого многообразия X обозначим через DR_X комплекс де Рама $\Omega_X^0 \xrightarrow{d} \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \to \ldots \to \Omega_X^{\dim X}$, где Ω_X^i — пучок алгебраических i-форм на X.

Если M — произвольный $\mathcal{D}_X$-модуль, то через $DR_X(M)$ обозначим комплекс де Рама M, $DR_X(M) = DR_X \otimes M$.

Далее, если $f: X \to Y$ — гладкий морфизм, то обозначим через $\Omega_{X/Y}^i$, $0 \leqslant i \leqslant d_{X,Y} = \dim X - \dim Y$ пучок относительных i-форм, через $DR_{X/Y}^{\cdot}$ — относительный комплекс де Рама и через $DR_{X/Y}(M)$, $M \in \mathcal{D}_X$-mod — комплекс

$$DR_{X/Y}^{\cdot} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} M.$$

Ясно, в частности, что $DR_{X/Y}(\mathcal{D}_X)$ является комплексом локально свободных правых $\mathcal{D}_X$-модулей.

Поскольку $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} = \mathcal{D}_{X \to Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_{X,Y}^{d_{X,Y}}$, определен естественный морфизм $\varepsilon: \Omega_{X/Y}^{d_{X,Y}} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{Y \leftarrow X}$, который, как легко проверить, коммутирует с правым действием $\mathcal{D}_X$.

4.8. Лемма. ε задает левую резольвенту

$$DR_{X/Y}\, \mathcal{D}_X)\, [d_{X,Y}] \to \mathcal{D}_{Y \leftarrow X}$$

модуля $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X}$ локально свободными правыми $\mathcal{D}_X$-модулями.

Эта лемма легко доказывается вычислениями в локальных координатах на X, в которых f является проекцией прямого произведения на один из сомножителей.

Из этой леммы вытекает, что для гладкого морфизма $f: X \to Y$ прямой образ $f_+ M$, $M \in \mathcal{M}_X$ задается формулой

$$f_+ M = R\tilde{f}_{\cdot} (DR_{X/Y}(M))\, [d_{X,Y}].$$

Отметим, однако, что эта формула задает $f_+ M$ как комплекс $\mathcal{O}_Y$-модулей. Действие векторных полей на $f_+ M$ определяется довольно сложными формулами. Эти формулы упрощаются в случае, когда f — проекция на прямое слагаемое (используя действие поднятых векторных полей на M).

4.9. Прямой и обратный образ для замкнутых вложений. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое вложение. Определим следующие функторы

$$f_0: \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_Y, \quad f_0(M) = f_{\cdot} (\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} M),$$

$$f^0: \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X, \quad f^0(M) = \mathrm{Hom}_{f^{\cdot}\mathcal{D}_Y} (\mathcal{D}_{Y \leftarrow X}, f^{\cdot} M).$$

Связь этих функторов друг с другом и со введенными ранее функторами прямого и обратного образа такова.

а) f_0 точен, f^0 точен слева, f_0 сопряжен слева к f^0.

б) $Rf_0 = f_+$, $Rf^0 = f^D$.

Весьма важная теорема Кашивары показывает, что f_0 и f^0 осуществляет эквивалентность между $\mathcal{M}_X$ и некоторой подкатегорией $\mathcal{M}_Y$. А именно, для замкнутого подмногообразия $Z \subset Y$ обозначим через $\mathcal{M}_Y(Z)$ полную подкатегорию $\mathcal{M}_Y$, состоящую из модулей, носители которых содержатся в Z.

4.9.1. Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое вложение. Тогда функторы $f_0: \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_Y(X)$ и $f^0: \mathcal{M}_Y(X) \to \mathcal{M}_X$ квазиобратны и задают эквивалентность категорий.

Набросок доказательства. Утверждение достаточно проверить локально, так что будем считать, что Y аффинно, а X задается уравнениями $\varphi_1 = \ldots = \varphi_d = 0$. Индукция по d сводит проверку к случаю, когда X — гиперповерхность в Y, задающаяся уравнением $\varphi = 0$.

Выберем векторное поле θ на Y, для которого $[\theta, \varphi] = 1$ (локально это можно сделать), и положим $I = \varphi \cdot \theta$.

Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_Y(X)$. Поскольку $\mathcal{F}$ квазикогерентен, для любого его сечения ξ имеем $\varphi^k \xi = 0$ для достаточно большого k.

Положим $\mathcal{F}_i = \{\xi, I\xi = i\xi\}$. Тогда $\varphi: \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$, $\theta: \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_i$ и легко проверить, что эти отображения являются изоморфизмами при $i < -1$. Далее, индукция по k и формула $\theta\varphi - \varphi\theta = 1$ показывают, что если $\varphi^k \xi = 0$, то $\varphi \in \mathcal{F}_{-1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{-k}$. Поэтому $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-1} = \mathbf{C}[\theta] \otimes \mathcal{F}_{-1}$ и $\ker \varphi|_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{-1}$. Следовательно, отображения $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{-1}$ и $\mathcal{G} \mapsto \mathbf{C}[\theta] \otimes \mathcal{G}$ — взаимно обратные морфизмы между $\mathcal{M}_Y(X)$ и $\mathcal{M}_X$. Легко проверить, что они совпадают с f^0 и f_0. ■

4.10. Комментарии к теореме Кашивары.

а) Теорема Кашивары демонстрирует следующее существенное отличие $\mathcal{D}$-модулей от $\mathcal{O}$-модулей. В категории $\mathcal{O}$-модулей для пучка $\mathcal{F}$, сосредоточенного на замкнутом подмногообразии $X \subset Y$ имеется важная характеристика: степень идеала J_X подмногообразия $X \subset Y$, аннулирующая $\mathcal{F}$ (так, все пучки $\mathcal{O}_Y / J_X^k$, $k = 1, 2, \ldots$ различны, хотя и имеют одно и то же поведение вдоль X). В категории $\mathcal{D}$-модулей дифференцирования в трансверсальных к X направлениях приводят к тому, что эта степень равна ∞ (из пучков $\mathcal{O}_Y / J_X^k$ можно составить по существу единственный пучок, на котором действует $\mathcal{D}_Y$: это пучок $\varinjlim \mathcal{O}_Y / J_Y^k$).

б) Теорема Кашивары дает простые доказательства утверждений пп. 2.4 и 2.15.

в) Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм. Тогда $f_+(D^b(\mathrm{Coh}\, X)) \subset D^b(Coh\, Y)$. Любой собственный морфизм разлагается в композицию замкнутого вложения и собственного гладкого морфизма. Поэтому наше утверждение следует из (1).

теоремы Кашивары, и описания f_+ для собственного гладкого морфизма в п. 4.7.

г) Пусть $f: X \to Y$ — замкнутое вложение. Тогда

$$\mathrm{ch}(f_0 M) = \{(y, \eta) \mid y \in X;\ (y, \mathrm{Pr}_{T^*Y \to T^*X}\eta) \in \mathrm{ch}\, M\}.$$

В частности, $f_0 M$ голономен, если и только если M голономен. Поскольку f_0 точен, и $f_+ = f_0$, комплекс $f_+ M^{\cdot}$ голономен, если и только если $M^{\cdot}$ голономен.

4.11. Функтор $\Gamma_{[Z]}$. Каноническое разложение. Пусть $i: Z \to Y$ — замкнутое вложение, $j: U \to Y$ — вложение дополнительного к Z открытого множества. Напомним функтор $\Gamma_{[Z]}: \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y \to \mathcal{S}\mathcal{A}b_Y$ из гл. 4, п. 5.5. Поскольку применение дифференциального оператора не увеличивает носитель сечения, $\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}_Y) \to \mathcal{M}_Y$. Вспоминая п. 3.7 а, получаем функториальный по $M \in D^b(\mathcal{M}_Y)$ выделенный треугольник

$$R\Gamma_{[Z]} M^{\cdot} \to M^{\cdot} \to j_+ j^D M^{\cdot}, \qquad (2)$$

который мы назовем *каноническим разложением* $M^{\cdot}$ относительно (Z, U).

4.11.1. Лемма. Имеем

$$R\Gamma_{[Z]} = i^D i_+$$

и морфизм $R\Gamma_{[Z]} M^{\cdot} \to M^{\cdot}$ совпадает с морфизмом сопряжения $i^D i_+ \to \mathrm{Id}$ (см. п. 4.6).

Доказательство сперва состоит в проверке формулы $\Gamma_{[Z]} = i^D i_+$, для чего проводятся несложные, но несколько громоздкие вычисления.

4.12. Теорема о замене базы. Пусть

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & p & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \rightarrow & S \end{array}$$

— коммутативная диаграмма алгебраических многообразий и их морфизмов. Тогда функторы $p^{\nabla} f_+$ и $g_+ q^{\nabla}$ из $D^b(\mathcal{M}_Y)$ в $D^b(\mathcal{M}_X)$ естественно изоморфны. В частности, если $Z = \varnothing$, то есть $p(X) \cap f(Y) = \varnothing$, то $p^{\nabla} f_+ = 0$.

Доказательство сводится к рассмотрению двух случаев: а) $f: T \times S \to S$ — проекция, б) f — замкнутое вложение. Первый случай разбирается непосредственно; во втором случае следует использовать теорему о замене базы в категории $\mathcal{S}\mathcal{A}b$ и теорему Кашивары.

§ 5. Голономные модули

5.1. Определение. а) Модуль $M \in \mathcal{M}_X$ называется *голономным*, если либо $M = \{0\}$, либо $\dim \mathrm{ch}\, M = \dim X$ (ср. п. 1.12).

б) Комплекс $M^{\cdot} \in D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ называется *голономным*, если все $H^i(M^{\cdot})$ — голономные модули.

Категория голономных модулей обозначается $\mathscr{H}ol_X$; категория голономных комплексов (полная подкатегория $D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod})$) обозначается $D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)$.

5.2. Свойства голономных модулей и комплексов. а) В точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ модуль M голономен в том и только том случае, если M' и M'' голономны. Поэтому категория $\mathscr{H}ol_X$ абелева.

б) $D^b_{\mathscr{H}ol_X}(\mathscr{D}_X)$ — триангулированная подкатегория $D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod})$ (с индуцированными функтором сдвига и треугольниками).

в) Вложение $\mathscr{H}ol_X \to \mathscr{D}_X\text{-mod}$ задает функтор $D^b(\mathscr{H}ol_X) \to \to D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)$. Трудная теорема Бейлинсона [23] утверждает, что этот функтор задает эквивалентность категорий (доказательство использует результаты гл. 7, § 2).

5.3. Двойственность. Функтор двойственности естественно определяется на категории $D^b_{\text{coh}}(\mathscr{D}_X)$ комплексов с когерентными когомологиями. Напомним, что в п. 4.5 был определен пучок $\tilde{\mathscr{D}}_X$ с двумя коммутирующими структурами левого $\mathscr{D}_X$-модуля.

5.3.1. Определение. Для $M^{\cdot} \in D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod})$ положим

$$\Delta_X M^{\cdot} = R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(M^{\cdot}, \tilde{\mathscr{D}}_X)\,[\dim X],$$

где $R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}$ берется относительно структуры 1 на $\tilde{\mathscr{D}}_X$. Структура 2 позволяет рассматривать $\Delta_X M^{\cdot}$ как объект $D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod})$. Таким образом, для вычисления $\Delta_X M^{\cdot}$ нужно заменить $M^{\cdot}$ на квазиизоморфный комплекс $P^{\cdot} = \{\ldots \to P_{-1} \to P_0 \to \to P_1 \to \ldots\}$ из локально проективных (или локально свободных) $\mathscr{D}_X$-модулей и положить $\Delta_X M^{\cdot} = \{\ldots \to Q_{-1} \to Q_0 \to Q_1 \to \ldots\}$, где

$$Q_i = \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(P_{-i-\dim X}, \tilde{\mathscr{D}}_X).$$

Ясно, что $\Delta_X M^{\cdot}$ продолжается до функтора

$$\Delta_X : D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod}) \to D^b(\mathscr{D}_X\text{-mod}).$$

При этом $\Delta_X \circ \Delta_X \simeq \mathrm{Id}$.

5.4. Двойственность для когерентных модулей. Если $M \in Coh_X$ рассматривается как 0-комплекс, то

$$H^i(\Delta_X M) = \mathscr{E}xt^{i+\dim X}_{\mathscr{D}_X}(M, \tilde{\mathscr{D}}_X).$$

Основой для исследования двойственности для голономных модулей является следующая теорема Рууса.

5.4.1. Теорема. *Пусть* $M \in Coh_X$. *Тогда*

а) $\dim \mathrm{ch}(\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{D}_X) \leqslant 2\dim X - i$.

б) $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{D}_X}(M, \mathscr{D}_X) = 0$ *для* $i < 2\dim X - \dim \mathrm{ch}\, M$.

Поскольку утверждения теоремы локальны по X, можно считать, что X аффинно, а на M существует хорошая фильтрация. С ее помощью утверждения теоремы сводятся к аналогичным утверждениям для градуированного модуля $\operatorname{gr} M$ над градуированным кольцом $\operatorname{gr} \mathscr{D}_X = \mathcal{O}^{\mathrm{pol}}_{T^*X}$ (см. п. 2.8), где они являются частью стандартной теории размерности.

5.5. Следствие. а) $\Delta_X\left(D^b_{\mathrm{Coh}}(\mathscr{M}_X)\right) \subset D^b_{\mathrm{Coh}}(\mathscr{M}_X)$.

б) Пусть $M \in \mathrm{Coh}_X$. Тогда комплекс $\Delta_X M$ сосредоточен в размерностях между $-\dim X$ и 0, то есть $H^i(\Delta_X M) = 0$ при $i < \dim X$ или $i > 0$.

в) M голономен в том и только том случае, если $H^i(\Delta_X M) = 0$ для $i \neq 0$.

г) Δ_X задает автодвойственность $\Delta_X : \mathscr{H}ol^0_X \to \mathscr{H}ol_X$, то есть $\Delta_X \circ \Delta_X \simeq \mathrm{Id}_{\mathscr{H}ol_X}$. В частности, функтор Δ_X точен на $\mathscr{H}ol_X$.

Первое утверждение вытекает из стандартных свойств $\mathscr{E}xt_{\mathscr{D}_X}$. Отметим, что если M некогерентен над $\mathscr{D}_X$, то когомологии $\Delta_X M$ даже не квазикогерентны.

Второе и третье утверждение вытекают из теоремы Рууса п. 5.4.1.

Четвертое утверждение сразу следует из третьего и замечания в конце предыдущего пункта.

Отметим, что из утверждения б) вытекает, что любой когерентный $\mathscr{D}_X$-модуль обладает локально проективной резольвентой длины $\leqslant \dim X$.

5.6. Голономные модули и функторы. Следующая теорема утверждает, что свойство голономности сохраняется при применении функторов прямого и обратного образа (§ 3, § 4). А именно:

5.6.1. Теорема. Для $f: X \to Y$ имеем

$$\text{а)}\ f^D\left(D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_Y)\right) \subset D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X),$$

$$\text{б)}\ f_+\left(D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)\right) \subset D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_Y).$$

Доказательство теоремы основано на следующей ключевой лемме.

5.6.2. Лемма. Пусть $i: X \to Y$ — локально замкнутое вложение. Тогда $i_+\left(D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)\right) \subset D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_Y)$.

Ниже мы изложим основные шаги доказательства теоремы п. 5.6.1, отложив обсуждение основной леммы и связанного с этим понятия b-функции до п. 5.10.

5.7. Доказательство п. 5.6.1, а. Каждый морфизм алгебраических многообразий f разлагается в композицию проекции и замкнутого вложения, так что достаточно рассмотреть отдельно эти два случая. Если f — проекция, то, согласно п. 3.6 б), f^∇ — точный функтор, переводящий голономные модули в голономные. Поскольку f^D отличается от f^∇ только сдвигом, $f^D(D^b_{hol}(\mathscr{D}_Y))D^b_{hol}(\mathscr{D}_X)$

Пусть теперь $f:X\to Y$ — замкнутое вложение. Рассмотрим каноническое разложение $M^\cdot \in D^b_{hol}(\mathscr{D}_Y)$

$$f_+f^D M^\cdot \to M^\cdot \to j_+j^D M^\cdot,$$

где $j:U\to Y$ — вложение дополнительного к X открытого множества. Поскольку комплекс $j^D M^\cdot = M^\cdot|_U$ голономен, $j_+j^D M^\cdot$ голономен ввиду ключевой леммы п. 5.5.2. Поэтому $f_+f^D M^\cdot$ также голономен, и ввиду п. 4.10 г, $f^D M^\cdot$ голономен.

5.8. Критерий голономности. Этот критерий утверждает, что комплекс $M^\cdot \in D^b_{Coh}(\mathscr{M}_X)$ голономен в том и только том случае, если для любой точки $x\in X$ его слой $i_x^D M^\cdot$ в x (где $i_x: x\to X$ — вложение) имеет конечномерные когомологии.

Необходимость этого условия следует из п. 5.6.1 а, поскольку для $\mathscr{D}$-модулей над точкой голономность эквивалентна конечномерности.

Для доказательства достаточности нужно использовать следующую лемму.

5.8.1. Лемма. Пусть $M\in \mathrm{Coh}_X$. Тогда существует открытое плотное подмножество $U\subset X$, для которого $M|_U$ — локально свободный $\mathscr{D}$-модуль.

Проверка леммы сводится (ввиду локальности утверждения) к случаю, когда на M существует хорошая фильтрация. В этом случае $\mathrm{gr}\, M = \oplus M_i/M_{i-1}$ является конечно порожденным модулем над конечно порожденной $\mathcal{O}_X$-алгеброй $\mathrm{gr}\,\mathscr{D}_X$. Поэтому $\mathrm{gr}\, M$ свободен над $\mathcal{O}_U$ для некоторого открытого плотного $U\subset X$. Отсюда все M_i/M_{i-1} проективны над $\mathcal{O}_U$, так что $M\simeq \mathrm{gr}\, M$ как $\mathcal{O}_U$-модуль, то есть свободен над $\mathcal{O}_U$.

Возвращаясь к проверке достаточности критерия, будем использовать индукцию по $\dim S$, где $S=\mathrm{supp}\, M^\cdot$. По лемме п. 5.8.1 можно найти такое открытое $Y\subset S$, что $\dim(S\setminus Y) < \dim S$ и все когомологии $M^\cdot|_Y$ свободны над $\mathcal{O}_Y$. Поскольку слои когомологий над точками Y конечномерны, сами когомологии $M^\cdot|_Y$ $\mathcal{O}_Y$-когерентны, так что $M^\cdot|_Y \in D^b_{hol}(\mathscr{D}_Y)$. По ключевой лемме п. 5.6.2, $j_+M^\cdot|_Y$ также голономен (где $j:Y\to S$). Теперь каноническое разложение $M^\cdot|_S$ относительно $(Y, S\setminus Y)$ сводит утверждение о голономности $M^\cdot$ к комплексам с носителем $S\setminus Y$, размерность которого меньше размерности S. ■

Отметим, что одновременно с доказательством критерия доказано также следующее утверждение.

Комплекс $\mathscr{D}_X$-модулей $M^\cdot$ голономен тогда и только тогда, когда существует гладкая стратификация $X=\bigcup S_\alpha$ многообразия X, для которой все комплексы $M^\cdot_\alpha = j^D_\alpha M^\cdot$ (где $j_\alpha: S_\alpha \to X$ —

вложение) являются $\mathcal{O}_{S_\alpha}$-когерентными (то есть их когомологии $\mathcal{O}_{S_\alpha}$-когерентны).

5.9. Доказательство п. 5.6.1б. Поскольку случай замкнутого вложения содержится в ключевой лемме, достаточно рассмотреть случай, когда f — проекция. В этом случае проверка сводится к применению критерия п. 5.8 и теоремы о замене базы п. 4.12 для диаграммы

$$\begin{tikzcd} T_y \arrow[r, hook] \arrow[d] & T \times Y \arrow[d] \\ y \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd} .$$

5.10. Лемма о продолжении. При доказательстве ключевой леммы п. 5.6.2 используется следующая лемма о продолжении:

Пусть $U \subset X$ открыто, $N \in \mathcal{D}_X$-mod и M — голономный $\mathcal{D}_U$-подмодуль $N|_U$. Тогда у N существует такой голономный подмодуль N', что $N'|_U = M$. При доказательстве можно считать, что $M = N|_U$. После этого нужно положить $N' = \Delta_X(H^0(\Delta_X N))$ и использовать теорему Рууса п. 5.4.1.

5.11. Доказательство ключевой леммы. Случай замкнутого вложения рассмотрен в п. 4.10г. Поэтому мы можем считать, что $f: X \to Y$ — открытое вложение. Далее, можно считать, что Y аффинно, а M — голономный $\mathcal{D}_X$-модуль, порожденный одним сечением ξ. Используя чеховскую резольвенту, отвечающую аффинному покрытию $\{X_\alpha\}$ пространства X, мы приходим к следующей ситуации:

Y — аффинно, φ — функция на Y, $X = \{y, \varphi(y) \neq 0\}$, $i: X \to Y$ — вложение, M — голономный $\mathcal{D}_X$-модуль, порожденный одним сечением ξ. Требуется доказать, что $i_+ M$ голономен (заметим, что в этом случае $i_+ = i_*$ — точный функтор).

Существенная часть доказательства состоит в проверке того, что $i_+ M$ когерентен. Ясно, что $i_+ M$ порождается, как $\mathcal{D}_Y$-модуль, сечениями $\varphi^{-n}\xi$, $n \geqslant 0$. Поэтому когерентность $i_+ M$ вытекает из следующего утверждения: существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

$$\varphi^{-n-1}\xi \in \mathcal{D}(Y)(\varphi^{-n}\xi)$$

($\mathcal{D}(Y)$ — глобальные сечения $\mathcal{D}_Y$ на Y).

Это утверждение аналогично теореме п. 1.9 и имеет аналогичное доказательство: нужно расширить поле скаляров до поля рациональных функций $\mathbf{C}(\lambda)$ от одной переменной, рассмотреть расширенные модули $\widehat{M} = M \otimes \mathbf{C}(\lambda)$ над $\mathcal{D}(X) \otimes \mathbf{C}(\lambda)$ и $\widehat{N} = (i_+ M)[\varphi^\lambda]$ над $\mathcal{D}(Y) \otimes \mathbf{C}(\lambda)$ и использовать лемму о продолжении п. 5.10.

Аналогично теореме п. 1.9, при доказательстве когерентности автоматически получаем, что $\widehat{N}$ голономен и порождается над

$\mathscr{D}(X)\otimes\mathbf{C}(\lambda)$ одним сечением $\varphi^\lambda\xi$, а i_+M порождается $\varphi^{-n}\xi$ для любого $n>n_0$. Далее, ввиду голономности $\widehat{N}$ над $\mathscr{D}(X)\otimes\mathbf{C}(\lambda)$ мы можем (подставляя $\lambda\Leftarrow -n$ для $n>n_0$) найти дифференциальные операторы $P_i^{(n)}$, такие, что $P_i^{(n)}(\varphi^n u)=0$ и множество общих нулей их символов имеет размерность $\leqslant \dim X$. Поэтому i_+M голономен.

5.12. Функторы f_D, f^+ и их свойства. Для произвольного морфизма $f:X\to Y$ определим функторы $f_D: D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)\to$ $\to D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_Y)$, $f^+: D^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_Y)\to\mathscr{D}^b_{\mathscr{H}ol}(\mathscr{D}_X)$, формулами:

$$f_D=\Delta_Y f^+\Delta_X,\qquad f^+=\Delta_X f^D\Delta_Y.$$

Эти определения имеют смысл ввиду теоремы п. 5.6.1.

Таким образом, каждому $f:X\to Y$ мы сопоставили 4 функтора между категориями голономных комплексов $\mathscr{D}$-модулей: 2 прямых образа f_+ и f_D и два обратных образа f^+ и f^D.

Следующая теорема описывает некоторые свойства этих функторов.

5.12.1. Теорема. а) Существует канонический морфизм функторов $f_D\to f_+$, являющийся изоморфизмом для собственных f.

б) Если f — гладкий морфизм, то $f^D=f^+[2(\dim X-\dim Y)]$.

в) f_D сопряжен слева f^D, f^+ сопряжен слева f_+.

Сделаем несколько замечаний о доказательстве этой теоремы.

Предположим сперва, что $f=j$ — открытое вложение. В этом случае $j^D=j^+$ есть ограничение на открытое множество $X\subset Y$. Поэтому $j^+=j^D$ сопряжен слева j_+ (см. п. 4.6), так что $j_D=\Delta_Y j_+\Delta_X$ сопряжен слева $j^D=\Delta_Y j^+\Delta_X$.

Далее, $j^+\circ j_+=\mathrm{Id}$, откуда формально получаем (используя $\Delta_X\circ\Delta_X=\mathrm{Id}$), что $j^+\circ j_D=\mathrm{Id}$, то есть ограничение $j_D M^\cdot$ на X совпадает с $M^\cdot$. Это дает естественный морфизм $j_D M^\cdot\to j_+M^\cdot$, тождественный на X.

Таким образом, остается доказать утверждения а) и в) для собственных f и утверждение б) для гладких собственных f. (Отметим еще, что второе утверждение в в) следует из первого.) Однако все эти утверждения верны в более общей ситуации когерентных (а не только голономных) комплексов, поскольку f_+ для собственных f и f^D для гладких f переводят когерентные комплексы в когерентные (см. п. 4.10 в, п. 3.7б).

Утверждение б) следует из формулы (для собственного $f:X\to Y$)

$$R\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{D}_{X\to Y},\mathscr{D}_X)=\mathscr{D}_{Y\leftarrow X}[\dim Y-\dim X].$$

Утверждения а) и в) для собственных морфизмов вытекают из следующей теоремы двойственности.

5.13. Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм. Тогда

а) $\Delta_Y f_+ = f_+ \Delta_X$;

б) f_+ сопряжен слева f^D.

Доказательство этой теоремы основано на следующем предложении.

5.13.1. Предложение. Пусть p — проекция X в точку. Тогда для $M^{\cdot} \in D^b_{\mathrm{Coh}}(\mathcal{M}_X)$, $N^{\cdot} \in D^b(\mathcal{M}_X)$ имеем

$$p_+\left(\Delta_X M^{\cdot} \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N^{\cdot}\right) = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M^{\cdot}, N^{\cdot})[\dim X]$$

(действие $\mathcal{D}_X$ на тензорном произведении над $\mathcal{O}_X$ задается правилом Лейбница.

5.14. Внутренний Hom и тензорное произведение $\mathcal{D}$-модулей. Определим функторы «D-тензорное произведение»

$$\overset{D}{\otimes}: D^b(\mathcal{M}_X) \times D^b(\mathcal{M}_X) \to D^b(\mathcal{M}_X)$$

и «D-внутренний $\mathcal{H}om$»

$$I\,\mathrm{Hom}^D: D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{M}_X)^0 \times D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{M}_X) \to D^b(\mathcal{M}_X)$$

формулами

$$M^{\cdot} \overset{D}{\otimes} N^{\cdot} = (\mathrm{diag})^D (M^{\cdot} \boxtimes N^{\cdot})$$

$$I\,\mathrm{Hom}^D(M^{\cdot}, N^{\cdot}) = \Delta_X M^{\cdot} \overset{D}{\otimes} N^{\cdot},$$

где $\mathrm{diag}: X \to X \times X$ — диагональное вложение. Тогда предложение п. 5.13.1 можно (ввиду равенства

$$\left. M^{\cdot} \overset{D}{\otimes} N^{\cdot} = M^{\cdot} \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} N^{\cdot}[\dim X]\right)$$

интерпретировать как формулу

$$R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M^{\cdot}, N^{\cdot}) = p_+(I\,\mathrm{Hom}^D(M^{\cdot}, N^{\cdot})),$$

где $p: X \to \mathrm{point}$.

5.15. Неприводимые голономные $\mathcal{D}$-модули. Пусть $f: X \to Y$ — локально замкнутое вложение. Зададим отображение $f_{D+}: \mathcal{H}ol_X \to \mathcal{H}ol_Y$ формулой

$$f_{D+}(M) = \mathrm{Im}(H^0(f_D(M)) \to H^0(f_+(M))).$$

Если f аффинно (в частности, если X аффинно), то f_+ (а значит, и f_D на $\mathcal{H}ol_X$) — точный функтор, так что

$$f_{D+}(M) : \mathrm{Im}(f_D(M) \to f_+(M)).$$

5.15.1. Теорема. а) Пусть $f: X \to Y$ — аффинное вложение, причем X неприводимо и E — неприводимый $\mathcal{O}_X$-когерентный $\mathcal{D}_X$-модуль. Тогда $f_{D+}(E)$ — неприводимый голономный модуль. Его можно охарактеризовать как единственный неприводимый подмодуль $f_+(E)$ или как единственный неприводимый фактормодуль $f_D(E)$ или как единственный неприводимый подфактор $f_+(E)$ (или $f_D(E)$), ограничение которого на X отлично от 0.

б) Любой неприводимый голономный $\mathcal{D}_Y$-модуль M имеет вид $f_{D+}(E)$ для некоторого аффинного вложения $f: X \to Y$ с неприводимым X и некоторого неприводимого $\mathcal{O}_X$-когерентного $\mathcal{D}_X$-модуля E.

Обозначим такой модуль через $L(X, E)$.

в) $L(X, E) = L(X', E')$ если и только если замыкания X и X' в Y совпадают и $E|_U = E'|_U$ для некоторого открытого $U \subset X \cap X'$.

Наметим доказательство части а) теоремы. Прежде всего, $f_+(E)$ и $f_D(E)$ голономны, так что их длина конечна. Пусть N — неприводимый подмодуль $f_+(E)$. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(N, f_+(E)) = \mathrm{Hom}(f^D(N), E) \neq 0,$$

и оба $\mathcal{D}_X$-модуля $f^D(N), E$ неприводимы, так что $f^D(N) = E$. Далее, $f^D f_+(E) = E$, так что у $f_+(E)$ существует только один неприводимый подфактор N, для которого $f^D(N) \neq 0$, и, значит, ровно один неприводимый подмодуль N.

Аналогично, у $f_D(E)$ существует ровно один неприводимый фактормодуль N'.

Наконец,

$$\mathrm{Hom}(f_D(E), f_+(E)) = \mathrm{Hom}(E, f^D f_+(E)) = \mathbf{C}$$

и

$$\mathrm{Hom}(f_D(E), N) = \mathbf{C}.$$

Отсюда $N = \mathrm{Im}(f_D(E) \to f_+(E))$. Аналогично доказывается утверждение про N'.

Второе и третье утверждения теоремы доказываются с помощью леммы п. 5.8.1.

§ 6. Связности с регулярными особенностями

6.1. Интегрируемые связности. Наиболее простыми с геометрической точки зрения $\mathcal{D}_X$-модулями являются $\mathcal{O}_X$-когерентные модули, то есть (2.2в), интегрируемые связности. Напомним, что связность ∇ в локально свободном пучке $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ (пучке ростков алгебраического векторного расслоения F на X) — это $\mathbf{C}$-линейное отображение

$$\nabla: \mathcal{F} \to \Omega^1_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{F},$$

удовлетворяющее условию $\nabla(\varphi f) = d\varphi \otimes f + \varphi \nabla f$ для сечений

$\varphi\in\mathcal{O}_X(U)$, $f\in\mathcal{F}(U)$. По ∇ естественно строятся отображения

$$\nabla^{(p)}:\Omega_X^p\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{F}\to\Omega_X^{p+1}\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{F},\quad \nabla^{(0)}=\nabla,$$

удовлетворяющие условию $\nabla^{(p)}(\omega\otimes f)=d\omega\otimes f+(-1)^p\omega\wedge\wedge\nabla^{(0)}f$. Связность называется интегрируемой, если $\nabla^{(p+1)}\nabla^{(p)}=0$ для всех p. Интерпретируя ∇ как семейство отображений $\nabla_\Phi:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$, $\Phi\in\mathrm{Vect}_X$, задаваемых формулами $\nabla_\Phi f=\langle\nabla f,\Phi\rangle$, легко убедиться, что приведенное определение интегрируемости эквивалентно условию $\nabla_{[\Phi,\Psi]}=\nabla_\Phi\nabla_\Psi-\nabla_\Psi\nabla_\Phi$.

6.2. Аналитические многообразия. Аналогично можно определить аналитические интегрируемые связности в локально свободных пучках на аналитических многообразиях. Для таких связностей имеется следующее описание.

6.2.1. Теорема. Пусть $\tilde{X}$ — связное аналитическое неособое многообразие. Следующие категории эквивалентны.

а) Категория $\mathrm{Conn}(\tilde{X})$ интегрируемых связностей в локально свободных пучках $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-модулей конечного ранга.

б) Категория $LC(\tilde{X})$ локально-постоянных пучков конечномерных векторных пространств на $\tilde{X}$.

в) Категория $\pi_1(\tilde{X})$-mod конечномерных представлений фундаментальной группы $\pi_1(\tilde{X})$ многообразия $\tilde{X}$.

Устанавливающие эквивалентности функторы таковы: $(\nabla,\mathcal{F})$ переходит в пучок $\mathcal{E}$ плоских сечений $\nabla:\mathcal{E}(U)=\{f\in\mathcal{F}(U):\nabla f=0\}$; утверждение о локальной постоянности $\mathcal{E}$ — это теорема существования и единственности для аналитических решений аналитических линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Далее, $\mathcal{E}$ переходит в представление $\pi_1(\tilde{X})$ в слое $\mathcal{E}$ над какой-нибудь точкой $x\in\tilde{X}$, задаваемое монодромией, то есть продолжением сечений $\mathcal{E}$ вдоль путей в $\tilde{X}$.

6.3. Алгебраические связности. Для каждого алгебраического комплексного многообразия X через X^{an} будем обозначать соответствующее аналитическое многообразие. По связности ∇ в локально свободном пучке $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$ естественно строится связность ∇^{an} в соответствующем локально свободном пучке $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-модулей $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$. Если X — проективное многообразие, то теоремы типа GAGA утверждают, что отображение $(\nabla,\mathcal{F})\mapsto(\nabla^{\mathrm{an}},\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ задает эквивалентность между категориями алгебраических связностей на X и аналитических связностей на X^{an}. Используя теорему п. 6.2.1, получаем следующий результат:

6.3.1. Теорема. Для проективного алгебраического многообразия X категория интегрируемых связностей на X эквивалентна каждой из категорий $LC(X^{\mathrm{an}})$ и $\pi_1(X^{\mathrm{an}})$-mod из теоремы п. 6.2.1.

Вопрос о том, как распространить этот результат на некомпактные алгебраические многообразия, восходит к Риману (рассматривавшему комплексные кривые с несколькими выброшенными точками) и Гильберту, составляя содержание 21-й проблемы Гильберта. Подробное обсуждение различных аспектов этой проблемы см. в [101] и [114]. Здесь мы приведем лишь простейший пример, показывающий, что в том виде, как она сформулирована выше, теорема 6.3.1 неверна для некомпактных X.

Возьмем в качестве X проективную прямую $\mathbf{P}^1$, из которой выкинута одна точка. Введем координату z на X так, чтобы выкинутая точка отвечала $z=0$. Для любого многочлена P связность ∇_P в тривиальном одномерном расслоении на X, задаваемая формулой $\nabla_P\varphi = dz\otimes\frac{d\varphi}{dz} + dz\otimes\frac{1}{z^2}P\left(\frac{1}{z}\right)\varphi$, неособа на X (включая точку $z=\infty$). Все эти связности имеют нетривиальную монодромию (ибо $\pi_1(X^{\mathrm{an}})=\{0\}$). Однако ясно, что с алгебраической точки зрения все они неэквивалентны (плоское сечение связности ∇_P имеет вид $\varphi_p(z)=\exp\left\{-\int\limits^z \frac{1}{\zeta^2}P\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right\}$ и при разных P имеют алгебраически неэквивалентные особенности в точке $z=0$.

Для того, чтобы исправить ситуацию, нужно наложить на рассматриваемые алгебраические связности так называемые условия регулярности на бесконечности.

6.4. Связности с регулярными особенностями на кривой. Рассмотрим сперва связности на одномерных многообразиях. Пусть C — неособая кривая, $i: C\to\bar{C}$ — ее вложение в неособую полную кривую C в виде плотного подмножества. Для точки $p\in\bar{C}\setminus C$ выберем локальный параметр z в p и обозначим через $\mathcal{D}^p_{\bar{C}}$ подпучок пучка $\mathcal{D}_{\bar{C}}$, порожденный (как пучок алгебр) $\mathcal{O}_{\bar{C}}$ и оператором $d=z\frac{d}{dz}$. Ясно, что $\mathcal{D}^p_{\bar{C}}$ не зависит от выбора локального параметра в p.

6.4.1. Определение. Пусть ∇ — связность в локально свободном пучке $\mathcal{O}_C$-алгебр $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{O}_C$-когерентный $\mathcal{D}_C$-модуль. Будем говорить, что ∇ имеет *регулярную особенность в* p, если прямой образ $i_*\mathcal{F}$ в окрестности p является объединением $\mathcal{O}_{\bar{C}}$-когерентных $\mathcal{D}^p_{\bar{C}}$-подмодулей. Будем говорить, что ∇ имеет *регулярные особенности на* C, если ∇ имеет регулярные особенности во всех точках $p\in\bar{C}\setminus C$. ■

Несложно проверить, что свойство иметь регулярные особенности не зависит от выбора пополнения $\bar{C}$ кривой C. В приведенном в п. 6.3 примере регулярную особенность в точке $0\in\bar{C}\setminus C$

имеет лишь связность ∇_P, отвечающая $P=0$. В самом деле, сечения $i_{\cdot}\mathcal{F}$ в окрестности U точки $z=0$ суть мероморфные функции от z и действие $d=z\frac{d}{dz}$ на $Q(z)\in i_{\cdot}\mathcal{F}(U)$ задается формулой

$$dQ=z\frac{dQ}{dz}+\frac{1}{z}P\left(\frac{1}{z}\right)Q(z).$$

Поэтому при $P\neq 0$ любой ненулевой $\mathcal{D}_{\bar{C}}^{z=0}$-инвариантный подмодуль содержит мероморфные функции с полюсами сколь угодно высокого порядка при $z=0$ и поэтому не порождается над $\mathcal{O}_{\bar{C}}(U)=\mathbf{C}[z]$ конечным числом образующих.

Общий критерий регулярности связности ∇ в точке $p\in\bar{C}\setminus C$ состоит в следующем. Выбрав в достаточно малой окрестности $U\subset\bar{C}$ точки p базис $(e_1,\ldots,e_n)$ сечений векторного расслоения F, отвечающего $\mathcal{F}$, можно записать действие ∇ на сечение $\sum\varphi_i(z)e_i$ в виде

$$\nabla\varphi=dz\otimes\frac{d\varphi}{dz}+dz\otimes A(z)\varphi,$$

где $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, $A(z)$ — матрица связности ∇, состоящая из мероморфных в U функций с полюсом в $p=\{z=0\}$. При такой записи ∇ имеет регулярную особенность в p, если и только если $A(z)$ имеет при $z=0$ полюс не выше первого порядка.

Еще одна характеризация связностей с регулярной особенностью в точке $z=0$ (удобная в аналитической ситуации) состоит в том, что для таких связностей и только для них все плоские сечения в окрестности точки $z=0$ задаются многозначными аналитическими функциями со степенным (по $1/|z|$) ростом при $z\to 0$.

6.5. Связности с регулярными особенностями — общий случай. Пусть теперь X — произвольное неособое алгебраическое многообразие, ∇ — интегрируемая связность в локально свободном пучке $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}$. Для любого вложения $j: Y\to X$ гладкого подмногообразия обратный образ $j^{\cdot}\nabla$ (в смысле $\mathcal{D}$-модулей) задается, очевидно, связностью $\nabla|_Y$ на локально свободном пучке $\mathcal{O}_Y$-модулей $\mathcal{F}|_Y$.

6.5.1. Определение. Будем говорить, что ∇ имеет *регулярные особенности на* X, если для любого вложения $j: C\to X$ неособой кривой C в X связность $j^{\cdot}\nabla$ имеет регулярные особенности на C.

Стандартный способ изучения связностей с регулярными особенностями на X состоит в том, чтобы вложить X в полное неособое многообразие X в виде дополнения к дивизору с нормальными пересечениями D, $X=\bar{X}\setminus D$. Используя такое вложение, можно дать определение связности с регулярными особенностями, не апелирующее к кривым (даже два таких определения: одно — обобщающее определение п. 6.4.1, другое — основанное на контроле роста и ветвления ∇-плоских сечений $\mathcal{F}$ вблизи D).

Отметим еще, что в определении п. 6.5.1 можно брать не все кривые $C\subset X$, а лишь плотное подмножество (в пространстве кривых на X). В частности, представляя X в виде $X=\overline{X}\setminus D$ как выше, достаточно ограничиться лишь кривыми, проходящими через неособые точки D (то есть таким $C\subset X$, что замыкание $\bar{C}$ кривой C в X пересекает D в неособых точках).

6.6. Теорема Делиня. Обозначим категорию связностей с регулярными особенностями на X через $\mathrm{Conn}_r(X)$ (объектами $\mathrm{Conn}_r(X)$ служат пары $(\mathcal{F},\nabla)$, где $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, ∇ — связность с регулярными особенностями в $\mathcal{F}$; морфизмы в $\mathrm{Conn}_r(\mathcal{F})$ — отображения пучков со связностями, так что $\mathrm{Conn}_r(X)$ — полная подкатегория категории $\mathcal{M}_X$).

6.6.1. Теорема. Пусть X — неособое связное алгебраическое многообразие, X^{an} — соответствующее аналитическое многообразие. Категория $\mathrm{Conn}_r(X)$ эквивалентна каждой из категорий $LC(X^{an})$, $\pi_1(X^{an})$-mod из теоремы п. 6. 2. 1.

Отметим следующее важное следствие этой теоремы: категории $\mathrm{Conn}\,X^{\mathrm{an}}$ и $\mathrm{Conn}_r(X)$ эквивалентны, то есть каждая связность ∇ на X^{an} эквивалентна единственной связности вида ∇_1^{an}, где ∇_1 — связность с регулярными особенностями на X.

6.7. Функтор де Рама. Рассматривая связность ∇ на X как $\mathcal{D}_X$-модуль, определим функтор де Рама $DR(\nabla)= \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}},\ \nabla^{\mathrm{an}})$. Легко проверить, что $DR(\nabla)$ — локально постоянный пучок на X^{an} и $DR\colon \mathrm{Conn}_r(X^{\mathrm{an}})\to LC(X^{\mathrm{an}})$ осуществляет эквивалентность категорий из теоремы п. 6.6.1 (или п. 6.2.1): образ $1\in\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ есть ∇^{an}-плоское сечение $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$.

Цель теории соответствия Римана—Гильберта, которая будет изложена в следующем параграфе — обобщить этот результат с тем, чтобы описать в геометрических терминах произвольные (а не только $\mathcal{O}_X$-когерентные) $\mathcal{D}_X$-модули. Говоря очень приблизительно, для этого снова нужно использовать функтор типа функтора де Рама. По техническим причинам, вместо функтора $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}}$ удобнее рассматривать тензорное произведение с $\Omega_{X^{\mathrm{an}}}$ (пучком форм старшей степени на X^{an}). Важное отличие от частного случая $\mathcal{O}_X$-когерентных модулей состоит в том, что нужно перейти к производной категории, получая для каждого $M^{\cdot}\in D^b_{\mathcal{H}ol}(\mathcal{D}_X)$ комплекс $DR(M^{\cdot})=\Omega_{X^{\mathrm{an}}}\overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}}{\otimes}} M^{\cdot}$. При этом, в отличие от ситуации теоремы п. 6.6.1, мы получим комплекс пучков, когомологии которого будут, вообще говоря, уже не локально постоянными, а лишь конструктивными пучками векторных пространств. Основной результат, доказанный независимо Мебху и Кашиварой, [97], [117], [118] состоит в том, что:

а) функтор $\Omega_{X^{\mathrm{an}}}\overset{L}{\otimes}\cdot$ задает эквивалентность некоторой производной категорий $\mathcal{D}_X$-модулей (голономных модулей с регулярными особенностями) с производной категорией комплексов пучков векторных пространств на X^{an}, когомологии которых конструктивны относительно некоторой алгебраической стратификации;

б) при этой эквивалентности голономные модули с регулярными особенностями (то есть H^0-комплексы в производной категории) отвечают превратным пучкам на X^{an} (средней превратности).

§ 7. $\mathcal{D}$-модули с регулярными особенностями

7.1. $\mathcal{D}$-модули на кривой. Пусть C — гладкая кривая и M — голономный $\mathcal{D}_C$-модуль. Тогда, согласно п. 5.8.1, существует плотное открытое по Зарисскому подмножество $C' \subset C$, ограничение M на которое задается интегрируемой связностью (то есть является $\mathcal{O}_{C'}$-когерентным $\mathcal{D}_{C'}$-модулем). Мы будем говорить, что M — *регулярный голономный* (*r. h.*) *$\mathcal{D}_C$-модуль*, если $M_{C'}$ — связность с регулярными особенностями. Будем говорить, что $M^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\, D^b_{\mathrm{Hol}}(\mathcal{D}_C)$ является *регулярным голономным комплексом*, если все $H^i(M)$ суть *r. h.* модули. Обозначим полную подкатегорию $\mathcal{D}_C$-mod, состоящую из *r. h.* модулей через $RH(\mathcal{D}_C)$, и полную подкатегорию $D^b(\mathcal{D}_C\text{-mod})$, состоящую из *r. h.* комплексов, через $D^b_{rh}(\mathcal{D}_C)$.

7.1.1. Основные свойства. а) Любой голономный $\mathcal{D}_C$-модуль, носитель которого нульмерен, лежит в $RH(\mathcal{D}_C)$.

б) Категория $RH(\mathcal{D}_C)$ замкнута относительно расширений и перехода к подфакторам и, в частности, является абелевой категорией.

в) Если две вершины выделенного треугольника в $D^b(\mathcal{D}_C\text{-mod})$ лежат в $D^b_{rh}(\mathcal{D}_C)$, то и третья его вершина лежит в $D^b_{rh}(\mathcal{D}_C)$. В частности, $D^b_{rh}(\mathcal{D}_C)$ — триангулированная подкатегория $D^b(\mathcal{D}_C\text{-mod})$.

7.2. Общий случай. Определение модулей и комплексов с регулярными особенностями на произвольном многообразии X сводится к случаю кривой так же, как в п. 6.5.

7.2.1. Определение. Комплекс $M^{\cdot} \in D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ называется *регулярным голономным* (*r. h.*), если

а) $M^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\, H^b_{\mathrm{Hol}}(\mathcal{D}_X)$.

б) Для любого морфизма $\varphi: C \to X$ гладкой неособой кривой C в X комплекс $\varphi^D M^{\cdot}$ имеет регулярные особенности на C. ■

Применяя, в частности, это определение к 0-комплексу $\mathcal{D}_X$-модулей, получаем понятие *$\mathcal{D}_X$-модуля с регулярными особенностями*.

Обозначим категорию $r. h.$ модулей на X через $RH(\mathcal{D}_X)$ и категорию (ограниченных) $r. h.$ комплексов на X через $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$.

7.3. Свойства регулярных голономных комплексов. а) Если в п. 7.2.1 б) морфизм φ постоянен (отображение в точку) и $M^{\cdot} \in Ob D^b_{hol}(\mathcal{D}_X)$, то $\varphi^D M^{\cdot}$ имеет $\mathcal{O}_C$-свободные $\mathcal{O}_C$-когерентные когомологии и, значит, регулярен.

б) Если X — кривая, то у нас есть два определения $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$: внутреннее, как в п. 7.1, и внешнее, как в п. 7.2.1. Легко проверить, что они эквивалентны: для этого нужно использовать свойство а) из этого пункта и следующее утверждение. Пусть $\varphi: C \to \widetilde{C}$ — доминантный морфизм кривых. Тогда $M^{\cdot} \in D^b(\mathcal{D}_{C'})$ есть $r. h.$ комплекс на C' в том и только том случае, если $\varphi^D M^{\cdot}$ есть $r. h.$ комплекс на C.

в) Если две вершины выделенного треугольника в $D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})$ лежат в $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$, то и третья вершина также лежит в $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$.

7.4. Сохранение регулярности при операциях над $\mathcal{D}$-модулями. В этом пункте мы сформулируем утверждения, показывающие, что свойство $r.h.$ сохраняется при основных операциях над $\mathcal{D}$-модулями. Пусть $f: X \to Y$ морфизм алгебраических многообразий.

а) Если $M^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_Y)$, то $f^D M^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$. Это сразу следует из определения п. 7.2.1, поскольку f^D сохраняет голономность и $\varphi^D \circ f^D = (f \circ \varphi)^D$.

б) *Если $M^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$, то $f_+ M^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_Y)$.* Поскольку любой морфизм f разлагается в композицию вложения и проекции, достаточно рассмотреть эти два случая. Случай, когда f — вложение, разбирается достаточно легко. Случай, когда f — проекция, более сложен. Основные технические сложности приходится преодолевать в частном случае, когда $f: C \times \mathbf{A}^1 \to C$ — проекция произведения аффинной гладкой кривой C и аффинной прямой $\mathbf{A}^1$ на первый сомножитель. Доказательство утверждения б) в этом случае сводится к явному вычислению $f_+ M$ для так называемых стандартных модулей, которые будут определены в пункте 7.4 в) ниже.

в) Пусть $i: Y \to X$ — вложение гладкого неособого аффинного локально замкнутого подмногообразия и $\mathcal{F}$ — связность с регулярными особенностями на Y. Модуль вида $i_+\mathcal{F}$ на X называется *стандартным $\mathcal{D}_X$-модулем* (заметим, что поскольку Y аффинно, $i_+\mathcal{F}$ сосредоточен в степени 0). Ввиду утверждения п. 7.4б) для вложений, любой стандартный модуль голономен и регулярен. Более того, оказывается, что *стандартные модули порождают* $D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$ (то есть наименьшая триангулированная подкатегория $D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$, содержащая все стандартные $\mathscr{D}_X$-модули, совпадает с $D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$). Поэтому многие утверждения об объектах $D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$ (в частности, утверждение из 7.4 б) для проекции $f: C\times \mathbb{A}^1\to C$) достаточно проверять для стандартных модулей.

г) Категория $D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$ замкнута относительно функтора двойственности Δ_X.

д) Пусть $M^{\cdot}\in \mathrm{Ob} D^b_{rh}(\mathscr{D}_X)$. Тогда любой неприводимый подфактор любого модуля $H^i(M^{\cdot})$ лежит в $RH(\mathscr{D}_X)$.

Оба эти утверждения доказываются достаточно формально с помощью индукции по размерности носителя $M^{\cdot}$ и утверждения 7.4 в).

е) Категории *r.h.* комплексов сохраняются при применении функторов f_D и f^+. Это следует из 7.4 а), б), г).

7.5. З а м е ч а н и е. Другой подход к определению *r.h.* комплексов состоит в том, чтобы сперва определить неприводимые (или стандартные) *r.h.* модули через связности с регулярными особенностями примерно так, как в п. 7.4 в), и затем принять п. 7.4 д) в качестве определения общего *r.h.* комплекса. При таком подходе придется доказывать пп. 7.4 а), б), г) и возникающие при этом технические сложности будут примерно эквивалентными тем, которые возникают при описанном здесь подходе.

7.6. G-эквивариантные $\mathscr{D}$-модули. Пусть алгебраическая комплексная группа G действует на алгебраическом многообразии X. Такое действие задается морфизмом $\nu: G\times X\to X$ ($\nu(g,x)=gx$), удовлетворяющим обычным условиям ассоциативности. Обозначим также через $p: G\times X\to X$ проекцию.

7.6.1. О п р е д е л е н и е. *G-эквивариантным $\mathscr{D}_X$-модулем* называется пара (M,s), состоящая из $\mathscr{D}$-модуля M и изоморфизма $\mathscr{D}_{G\times X}$-модулей $s: \nu^D M\to p^D M$. Морфизм $\Phi: (M_1,s_1)\to (M_2,s_2)$ — это морфизм $\mathscr{D}_X$-модулей $\varphi: M_1\to M_2$ такой, что $p^D(\varphi)s_1=s_2\nu^D(\varphi)$.

Обозначим через $M_{G,\,\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ категорию $\mathscr{D}_X$-когерентных G-эквивариантных $\mathscr{D}_X$-модулей. Основной результат, который вместе с теоремой п. 2.12.1 позволяет использовать теорию $\mathscr{D}$-модулей в теории представлений групп, состоит в следующем.

7.6.2. Т е о р е м а. Пусть действие G на X таково, что X состоит из конечного числа G-орбит. Тогда каждый модуль из $\mathscr{M}_{G,\,\mathrm{coh}}(\mathscr{D}_X)$ является регулярным голономным $\mathscr{D}_X$-модулем.

Доказательство этой теоремы основано на следующем свойстве обратного образа для $\mathscr{D}$-модулей (которое частично обращает свойство п. 7.4 а).

7.6.3. П р е д л о ж е н и е. Пусть $f: X \to Y$ — гладкий сюръективный морфизм и M — когерентный $\mathcal{D}_Y$-модуль, для которого $f^D M$ есть $r.h.$ комплекс. Тогда M есть $r.h.$ модуль.

7.6.4. З а м е ч а н и е. Отметим, что в определении п. 7.6.1 речь шла о G-эквивариантных $\mathcal{D}_X$-модулях, а не о G-эквивариантных объектах соответствующей производной категории. Попытки прямо перенести определение п. 7.6.1 на производную категорию оказываются неожиданно безуспешными, и дать разумное (с точки зрения теорий представлений) определение G-эквивариантных комплексов $\mathcal{D}_X$-модулей сравнительно нелегко.

§ 8. Эквивалентность категорий (соответствие Римана — Гильберта)

8.1. Функтор де Рама. Напомним, что для каждого алгебраического комплексного многообразия X через X^{an} обозначается соответствующее аналитическое многообразие и через $\mathcal{O}_{X^{an}}$, $\Omega^i_{X^{an}}$, $\mathcal{D}_{X^{an}}$ — естественные пучки на нем (аналитических функций, голоморфных i-форм, голоморфных дифференциальных операторов и т. д.). В частности, $\Omega_{X^{an}} = \Omega^{\dim X}_{X^{an}}$ есть (аналогично п. 2.4) пучок правых $\mathcal{D}_{X^{an}}$-модулей. Пусть также $\mathcal{S}h_{X^{an}}$ — категория пучков векторных пространств на X^{an}.

8.1.1. О п р е д е л е н и е. *Функтор де Рама* $DR: D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod}) \to D^b(\mathcal{S}h_{X^{an}})$ определяется формулой

$$DR(M^\cdot) = \Omega_{X^{an}} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{X^{an}}}{\otimes}} M^\cdot[\dim X].$$

Для вычисления $\overset{L}{\otimes}$ можно использовать левую локально свободную резольвенту $\Omega_{X^{an}}$, аналогичную 2.11.1:

$$0 \to \mathcal{D}_{X^{an}} \to \Omega^1_{X^{an}} \underset{\mathcal{O}_{X^{an}}}{\otimes} \mathcal{D}_{X^{an}} \to \ldots \to \Omega_{X^{an}} \underset{\mathcal{O}_{X^{an}}}{\otimes} \mathcal{D}_{X^{an}} \to \Omega_{X^{an}} \to 0$$

(правое действие $\mathcal{D}_{X^{an}}$ на элементах комплекса задается умножением в $\mathcal{D}_{X^{an}}$). Таким образом, $DR(M^\cdot)$ — это комплекс пучков, ассоциированный с бикомплексом

$$C^{ij} = \Omega^{i-\dim X}_{X^{an}} \underset{\mathcal{O}_{X^{an}}}{\otimes} M^j.$$

8.2. Т е о р е м а. а) Функтор DR устанавливает эквивалентность между категориями $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ и $D^b_c(X^{an}, \mathbb{C})$ (подкатегория $D^b(\mathcal{S}h_{X^{an}})$, состоящая из комплексов с когомологиями, конструктивными относительно некоторой стратификации X^{an} алгебраическими подмногообразиями, см. гл. 7, § 1).

б) Функтор DR коммутирует с прямыми и обратными образами, с двойственностью и с тензорными произведениями.

в) DR задает эквивалентность между категорией $RH(\mathcal{D}_X)\subset$ $\subset D^b{}_{rh}(\mathcal{D}_X)$ регулярных голонмных мдулей и категорией $\mathcal{M}_c(p_{1/2}, X^{an}, \mathbf{C})$ превратных (средней превратности) пучков на X^{an}.

8.3. План доказательства. Теорема п. 8.2 вытекает из ряда следующих ниже утверждений а)—д), некоторые из которых справедливы не только для *r.h.* комплексов, но и для любых голономных комплексов. Заметим кстати, что утверждения а), б), г), д) уточняют пункт б) теоремы п. 8.2. Пусть $f: X\to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, $f^{an}: X^{an}\to Y^{an}$ — соответствующий морфизм аналитических многообразий:

а) $DR\circ f_+=Rf^{an}_*\circ DR$.

б) $DR(M^\cdot\boxtimes N^\cdot)=DR(M^\cdot)\boxtimes^{an}DR(N^\cdot)$, где $M^\cdot$, $N^\cdot$ — комплексы $\mathcal{D}$-модулей на многообразиях X_1, X_2, $M^\cdot\boxtimes N^\cdot$ — их внешнее тензорное произведение — комплекс на $X_1\times X_2$, $\boxtimes^{an}$ — внешнее произведение комплексов пучков векторных пространств; комплекс $M^\cdot$ голономен, комплекс $N^\cdot$ — когерентен (над $\mathcal{D}_{X_2}$).

в) Если $M^\cdot\in D^b_{\mathcal{H}ol}(\mathcal{D}_X)$, то $DR(M^\cdot)\in D^b_c(X^{an}, \mathbf{C})$.

г) $DR\circ f^D=(f^{an})^!\circ DR$.

д) $DR\circ\Delta_X=\mathcal{D}_{X^{an}}\circ DR$ (здесь Δ_X — двойственность $\mathcal{D}$-модулей, см. п. 5.3.1, $\mathcal{D}_{X^{an}}$ — двойственность Вердье, см. гл. 4, п. 5.16).

е) DR — строгий полный функтор (т. е. задает изоморфизм Hom'ов).

ж) DR сюръективен на классах изоморфизмов объектов.

з) $M^\cdot$ есть H^0-комплекс в том и только в том случае, если $DR(M^\cdot)$ — $p_{1/2}$-превратный пучок.

Мы не будем приводить здесь полных доказательств утверждений а)—з). При доказательстве а), б), г), д) сперва строится функториальный морфизм левой части требуемого равенства в правую, а затем доказывается, что он является изоморфизмом. Это достаточно проверить на каком-нибудь множестве образующих категории $D^b{}_{rh}$ (например, для стандартных модулей, см. п. 7.4в). Утверждения в), е) также проверяются на стандартных образующих. Утверждение ж) проверяется на простых объектах категории $RH(\mathcal{D}_X)$, где оно сводится к теореме Делиня п. 6.6.1. Для доказательства утверждения з) используется следующая характеризация голономных модулей: объект $M^\cdot\in D^b_{hol}(\mathcal{D}_X)$ является H^0-комплексом, если и только если $M^\cdot$ и $\Delta_X M^\cdot$ удовлетворяют следующему условию:

(*) Каждое локально замкнутое подмногообразие Z в X (с вложением $i_Z: Z\to X$) содержит плотное открытое по Зарисскому подмножество $U\subset Z$, для которого когомологии

$H^k((i_Z^D M^\cdot)|_U)$ равны 0 при $k<0$ и являются $\mathcal{O}_Z$-когерентными при $k \geqslant 0$.

8.4. Замечания. а) *Функтор решений.* Определим функтор $\mathrm{Sol}: D^b(\mathcal{D}_X\text{-mod})^0 \to D^b(\mathcal{S}h_{X^{\mathrm{an}}})$ формулой $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}^\cdot) = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$. Легко видеть, что $\mathrm{Sol} = DR \circ \Delta_X$, так что Sol задает антиэквивалентность между категориями $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ и $D^b_c(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$. Кашивара [97] использовал именно функтор Sol.

б) Из утверждений п. 8.3 а), б), д) вытекает, что DR переставляет пары функторов f^+ и $(f^{\mathrm{an}})^\cdot$, а также f_D и $Rf_!^{\mathrm{an}}$.

в) Из 8.3 в) следует, что для каждого голономного комплекса $\mathcal{M}^\cdot$ существует единственный регулярный голономный комплекс $\widetilde{\mathcal{M}}^\cdot$, для которого $DR(\mathcal{M}^\cdot) = DR(\widetilde{\mathcal{M}}^\cdot)$ (и значит $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}^\cdot) = \mathrm{Sol}(\widetilde{\mathcal{M}}^\cdot)$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Теория $\mathcal{D}$-модулей изложена с той или иной степенью полноты и общности в книгах Бьерка [27] и Фама [21] и в трех статьях Бореля в [30], основанных на неопубликованных лекциях И. Н. Бернштейна. К этой теории примыкает теория модулей над кольцами микродифференциальных операторов; с ней можно познакомиться по книге Шапира [129] и по обзорной статье Кашивары и Каваи [100], где содержатся также дальнейшие ссылки.

Сформулированные в § 1 факты об алгебрах Вейля доказаны в [27] и в [58]. Большинство результатов § 2—5 содержатся в [30]. Понятие $\mathcal{D}$-аффинного многообразия из 2.12 и теорема 2.12.1, лежащие в основе применения D-модулей к теории представлений полупростых групп Ли, принадлежат А. А. Бейлинсону и И. Н. Бернштейну [24]. Связь теории $\mathcal{D}$-модулей и теории превратных пучков с теорией представлений, о которой мы здесь почти ничего не говорим, резко изменили в настоящее время лицо теории представлений; обзор некоторых результатов в этом направлении см. [67], [92], а также в соответствующих томах этой серии.

Связности с регулярными особенностями на общем многообразии были введены Делинем [50], обобщившим понятие фуксовых особых точек для обыкновенных дифференциальных уравнений. См. обзоры Катца [101] и Мальгранжа [114], в которых можно найти доказательства большинства результатов из § 6.

Доказательства свойств $\mathcal{D}$-модулей с регулярными особенностями из § 7 содержатся в [30]. Соответствие Римана—Гильберта (теорема 8.12) доказаны (в несколько другой форме) Кашиварой [97] и Мебху [117], [118]. Наше изложение следует [30].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейлинсон А. А.* Когерентные пучки на P^n и проблемы линейной алгебры // Функц. анализ и его прил.— 1978.— *12*, № 3.— С. 68—69.
2. *Бернштейн И. Н.* Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // Функц. анализ и его прил.— 1971.— *5*, № 2.— С. 1—16.
3. — Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру // Функц. анализ и его прил.— 1972.— *6*, № 4.— С. 26—40.

4. —, *Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.* Алгебраические расслоения на P^n и задачи линейной алгебры // Функц. анализ и его прил.— 1978.— *12*, № 3.— С. 66—67.
5. *Варченко А. Н.* Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР, сер. мат.— 1981.— *45*, № 3.— С. 540—591.
6. — Асимптотики интегралов и структуры Ходжа // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.— 1983.— *22*.— С. 130—166.
7. *Гельфанд С. И.* Пучки на P^n и задачи линейной алгебры / Оконек К., *Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах.— М.: Мир, 1984.— С. 278—305.
8. —, *Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории.— М.: Наука, 1988.— 416 с.
9. *Говоров В. Е.* О плоских модулях // Сиб. мат. ж.— 1965.— *6*, № 2.— С. 300—304.
10. *Головин В. Д.* Гомологии аналитических пучков и теоремы двойственности.— М.: Наука, 1986.— 192 с.
11. *Паршин А. Н.* Об одном обобщении якобиева многообразия // Изв. АН СССР, сер. мат.— 1966.— *30*, № 1.— С. 175—182.
12. *Суслин А.* Проективные модули над кольцом многочленов свободны // Докл. АН СССР.— 1976.— *229*, № 5.— С. 1063—1066.
13. *Фейгин Б. Л., Цыган Б. Л.* Когомологии алгебр Ли обобщенных якобиевых матриц // Функц. анализ и его прил. 1983.— *17*, № 2.— С. 86—87.
14. —, *Фукс Д. Б.* Когомологии групп и алгебр Ли // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Фундаментальные направления.— 1988.— *21*.— С. 121—209.
15. *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.— М.: Наука, 1984.— 272 с.
16. —, *Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.* Гомотопическая топология.— М.: Изд-во МГУ, 1969.— 460 с.
17. *Хелемский А. Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах.— М.: Изд-во МГУ, 1986.— 288 с.
18. Algebraic number theory / Ed. Cassels J. W. S., Fröhlich A.— London; New York: Academic Press, 1967 (Пер. на рус. яз.: Алгебраическая теория чисел / Под ред. Касселса Дж., Фрелиха А.— М.: Мир, 1969.— 484 с.)
19. *Atiyah M.* Complex analytic connections in fiber bundles // Trans. Amer. Math. Soc.— 1957.— *85*, № 1.— С. 181—207.
20. *Bass H.* Algebraic K-theory. New York; Amsterdam: Benjamin Inc., 1968.— 762 с. (Пер. на рус. яз.: *Басс Х.* Алгебраическая K-теория.— М.: Мир, 1973.— 592 с.)
21. *Beilinson A. A.* Notes on absolute Hodge cohomology // Contemp. Math.— 1986.— *55*, Part 1.— С. 35—68.
22. — On the derived category of perverse sheaves // Lect. Notes Math.— 1987.— *1289*.— С. 27—41.
23. — How to glue perverse sheaves // Lect. Notes Math.— 1987.— *1289*.— С. 42—51.
24. —, *Bernstein I. N.* Localisation des G-modules // C. r. Acad. sci. Sér. A.— 1981.— *292*, № 1,— С. 15—18.
25. —, —, *Deligne P.* Faiseaux pervers // Astérisque.— 1982.— *100*.— 172 с.
26. —, *Schechtman V.* Determinant bundles and Virasoro algebras // Commun. Math. Phys.— 1988.— *118*.— С. 651—701.
27. *Björk J. E.* Rings of differential operators.— Amsterdam: North Holland, 1979.— 374 с.
28. *Bloch S., Kato K.* p-adic étale cohomology // Publ. Math. IHES.— 1986.— *69*.— С. 107—152.
29. *Borel A. et al.* Seminar on intersection cohomology // Boston: Birkhauser, 1984.— 235 с.

30. — *et al.* Algebraic *D*-Modules.— Boston e. a.: Academic. Press, 1987.— 355 c.
31. —, *Wallach N.* Continuous cohomology, discrete groups and representations of reductive groups // Ann. Math. Stud.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.— *94.*— 387 c.
32. *Bourbaki N.* Algebre, Ch. 10. Algèbre homologique.— Paris: Masson, 1980 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.* Алгебра, Гл. X. Гомологическая алгебра.— М.: Наука, 1987.— 184 с.).
33. *Bredon G.* Sheaf theory.— New York: McGrow-Hill, 1967 (Пер. на рус. яз.: *Бредон Г.* Теория пучков.— М.: Наука, 1988.— 312 с.).
34. *Brown K. S.* Cohomology of groups.— New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1982.— 308 c. (Пер. на рус. яз.: *Браун К. С.* Когомологии групп.— М.: Наука, 1987.— 312 с.).
35. *Carlson J.* Extensions of mixed Hodge structures. Journées de Geom. Algebr. d'Angers, 1979.— Amsterdam: Sijthoff & Noordhoof, 1980.— C. 107—127.
36. —, *Green M., Griffiths P., Harris J.,* Infinitesimal variations of Hodge structure, I—III // Compos. Math.— 1983.— *50.*— C. 109—324.
37. *Cartan H.* Varietés algebriques complexes et cohomologie // Colloque sur les fonctions des plusieurs variables: Bruxelles, Mars 11—14, 1953.— Liège—Paris, 1953. (Пер. на рус. яз.: *Картан А.* Комплексные аналитические многообразия и теория когомологий. В сб.: Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1957.— С. 352—362)
38. — Sur les groupes d'Eilenberg—MacLane $H(\Pi, n)$, I, II // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1954.— *40,* № 6.— C. 467—471; № 8.— C. 704—707.
39. — Collected works.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979.— 1469 c.
40. —, *Eilenberg S.* Homological algebra // Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1956:— 390 c. (Пер. на рус. яз.: *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.— 510 с.)
41. *Cartier P.* Homologie cyclique. Rapport sur les travaux recents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen, ... Sem. Bourbaki, n° 621 // Astérisque, 1985.— *121—122.*— C. 123—146.
42. *Cattani E., Kaplan A.* Polarized mixed Hodge structures and the local monodromy of a variation of Hodge structure // Invent. Math.— 1982.— *67,* № 1.— C. 101—115.
43. —, — On the SL(2)-orbits in Hodge theory / Preprint IHES // Inst. Hautes Etudes Sci.— M/82/58.— 1982.— C. 1—41.
44. —, —, *Schmid W.* Degeneration of Hodge structures // Ann Math.— 1986.— *123.*— C. 457—535.
45. *Cheeger J., Goresky M., MacPherson R.* L^2-cohomology and intersection homology for singular algebraic varieties // Seminar on differential geometry / Ed. Yau S. T.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Пер. на рус. яз: *Чигер Дж., Горески М., Мак-Ферсон Р.* L^2-когомологии и ГМ-когомологии особых алгебраических многообразий // *Фултон У., Мак-Ферсон Р.* Категорный подход к изучению пространств с особенностями. М.: Мир, 1983.— С. 163—197)
46. *Chen K.-T.* Iterated path integrals // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— *83.*— C. 831—879.
47. *Connes A.* Non-commutative differential geometry // Publ. Math. IHES.— 1986.— *62.*— C. 41—144.
48. *Cornalba M., Griffiths P. A.* Some transcendental aspects of algebraic geometry // Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.— 1975.— *29.*— C. 3—110.
49. *Curtis C. W., Reiner I.* Representation theory of finite groups and associative algebras. New York; London: Interscience Publ., 1982 (Пер. на рус. яз.: *Кэртис Ч., Райнер И.,* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.— 668 с.)

50. *Deligne P.* Equations différentielles a points singuliers réguliers // Lect. Notes Math.— 1970.— *163*.— 133 c.
51. — Theorie de Hodge. I. Proc. Int. Congr. Math.— Nice, 1970.— *1*.— C. 425—430
52. — Theorie de Hodge. II // Publ. Math. IHES.— 1971.— *40*.— C. 5—58. (Пер. на рус. яз.: *Делинь П.* Теория Ходжа, II // Математика.— 1973.— *17*, № 5— С. 3—57)
53. — Theorie de Hodge. III // Publ. Math. IHES.— 1972.— *44*.— C. 5—77.
54. — Cohomologie à supports propres // Lect. Notes Math.— 1973.— *305*.— C. 250—480.
55. — Le formalisme des cycles évanescents // Lect. Notes Math.— 1973.— *340*.— C. 82—115.
56. — Poids dans la cohomologie des variétés algèbriques // Proc. Int. Congr. Math.— Vancouver, 1974.— C. 79—85.
57. *Dold A.* Lectures on algebraic topology.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1972.— 377 c. (Пер. на рус. яз.: *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии.— М.: Мир, 1976.— 464 с.)
58. *Ehlers F.* The Weyl algebra // [27].— C. 173—205.
59. *Faith C.* Algebra: modules, rings and categories // Berlin; Heidelberg; New York: Springer.— 1973 (Пер. на рус. яз.: *Фейс К.*, Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1, 2.— М.: Мир, 1977, 1979)
60. *Faltings G.* *p*-adic Hodge theory // J. Amer. Math. Soc.— 1988.— *1*, № 1.— C. 255—299.
61. *Feigin B. L., Tsygan B. L.* Additive *K*-theory // Lect. Notes Math.— 1987.— *1289*.— C. 67—209.
62. *Fontaine J. M.* Formes différentielles et modules de Tate des variétés abeliennes sur les corps locaux // Invent. Math.— 1982.— *65*, № 3.— C. 379—409.
63. *Gabber O.* The integrability of the characteristic variety // Amer. J. Math.— 1981.— *103*, № 3.— C. 445—468.
64. *Gabriel P., Zisman M.* Calculus of fractions and homotopy theory.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967 (Пер. на рус. яз.: *Габриэль П., Цисман М.* Категория частных и теория гомотопий.— М.: Мир, 1971.— 296 с.).
65. *Galligo A., Granger M., Maisonobe P.* *D*-modules et faiseaux pervers dont le support singulier est un crissement normale // Ann. Inst. Fourier.— 1985.— *35*, № 1.— C. 1—48.
66. *Gelfand I. M.* The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; some problems of integral geometry // Proc. Int. Congr. Math.— Nice, 1970.— *1*.— C. 95—111.
67. *Ginzburg V. A.* Geometrical aspects of representation theory // Proc. Int. Congr. Math.— Berkeley, 1986.— *1*.— C. 840—848.
68. *Godement R.* Topologie algèbrique et théorie des faiseaux.— Paris: Hermann, 1958.— 283 c. (Пер. на рус. яз.: *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков.— М.: ИЛ, 1961.— 320 с.)
69. *Goldblatt R.* Topoi. The categorial analysis of logic.— Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1979 (Пер. на рус. яз.: *Гольдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики.— М.: Мир, 1983.— 440 с.)
70. *Goresky M., MacPherson R.* Intersection homology. II // Invent. Math.— 1983.— *72*, № 1.— C. 77—130.
71. —, — Problems and bibliography on intersection homology // [26].— C. 221—234.
72. *Griffiths P. A.* Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems // Bull. Amer. Math. Soc:— 1970.— *76*, № 2.— C. 228—296.
73. —, *Harris J.* Principles of algebraic geometry.— New York; Chichester; Brisbane; Toronto: John Wiley & Sons, 1978 (пер. на рус. яз.: *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии, Т. 1, 2.— М.: Мир, 1982.— 496; 366 с.)

74. —, *Schmid W.* Recent developments in Hodge Theory // Proc. Int. Colloq. on Discrete Subgroups in Lie Groups.— Bombay, 1973.— Oxford Univ. Press, 1975.— C. 31—127.
75. *Grivel P.-P.* Les foncteurs de la catégorie des faiseaux associés à une application continue // [26].— C. 183—207.
76. *Grothendieck A.* A general theory of fiber spaces with structure sheaf.— Univ. of Kansas, 1955.
77. — Sur quelques points d'algèbre homologique // Tohoku Math. J.— 1957.— *9*, № 2.— C. 119—183; № 3.— C. 185—221 (Пер. на рус. яз.: *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: ИЛ, 1961.— 175 с.)
78. — Géometrie formelle et géometrie algèbrique // Sem. Bourbaki.— 1958/1958.— № 182.
79. — Hodge's general conjecture is false for trivial reasons // Topology.— 1969.— *8*, № 2.— C. 299—303.
80. *Guichardet A.* Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie.— Paris: Cedic / Fernand Nathan, 1980.— 394 с. (Пер. на рус. яз.: *Гишарде А.* Когомологии топологических групп и алгебр Ли.— М.: Мир, 1984.— 262 с.).
81. *Hain R.* The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties, I // J. *K*-Theory.— 1987.— *1*.— C. 271—324.
82. — Mixed Hodge structures on homotopy groups // Bull. Amer. Math. Soc.— 1986.— *14*, № 1.— C. 111—114.
83. —, *Zucker S.* Unipotent variations of mixed Hodge structure // Invent. Math.— 1987.— *88*, № 1.— C. 83—124.
84. *Happel D.* Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras // Lect. Notes London Math. Soc.— 1988.— *119*.— 208 с.
85. *Hartshorne R.* Residues and duality // Lect. Notes Math.— 1966.— *20*.— 423 с.
86. *Herstein I.* Noncommutative rings.— John Wiley & Sons, 1968. (Пер. на рус. яз.: *Херстейн И.* Некоммутативные кольца.— М.: Мир, 1972.— 192 с.)
87. *Hilton P. J., Stammbach U.* A course in homological algebra.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1971.
88. *Hodge W. V. D.* The theory and application of harmonic forms.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952.
89. Homological group theory / Ed. C. T. C. Wall // Lect. Notes London Math. Soc.— 1979.— *36*
90. *Illusie L.* Complexe cotangent et deformations. I, II // Lect. Notes Math.— 1971.— *239*.— 355 с.; 1972.— *283*.— 304 с.
91. *Iversen B.* Cohomology of sheaves. Berlin; New York. Heidelberg: Springer, 1986.
92. *Joseph A.* On the classification of primitive ideals in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra // Lect. Notes Math.— 1983.— *1024*.— C. 30—76.
93. *Kac V. G.* Infinite dimensional Lie algebras.— Boston: Birkhauser, 1983.— 251 с.
94. *Kapranov M. M.* On the derived category of coherent sheaves on some homogeneous spaces // Invent. Math.— 1988.— *92*, № 3.— C. 479—508.
95. *Karoubi M.* Homologie cyclique et *K*-theorie algèbrique, I, II // C. r. Acad. sci. Sér. 1.— 1983.— *297*.— C. 447—450; C. 513—516.
96. *Kashiwara M.* Vanishing cycles sheaves and holonomic systems of differential equations // Lect. Notes Math.— 1983.— *1016*.— C. 134—142.
97. — The Riemann — Hilbert problem for holonomic systems // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1984.— *20*, № 1.— S. 319—365.
98. — The asymptotic behavior of a variation of polarized Hodge structure // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1985.— *21*.— C. 853—875.
99. — A study of variation of mixed Hodge structure // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1986.— *22*.— C. 991—1024.

100. —, *Kawai T.* Microlocal analysis // Publ. Res. Inst. Math. Sci.— 1983.— *19*, № 3.— С. 1003—1032.
101. *Katz N.* An overview of Deligne's work on Hilbert's twenty first problem // Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems // Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.— 1976.— *28*.— С. 537—558.
102. *Kodaira K., Spencer D. C.* On deformations of complex analytic structures, I, II // Ann. Math.— 1958.— *67*.— С. 328—466.
103. *Lazard D.* Autour de la platitude // Bull. Soc. Math. France.— 1969.— *97*, № 1.— С. 81—128.
104. *Leray J.* L'anneau d'une représentation // C. r. Acad. sci.— 1946.— *222*.— С. 1366—1368.
105. *Loday J.-L.* Cyclic homology: a survey, preprint, 1985.— 32 с.
106. —, *Quillen D.* Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices // Comment. Math. Helv.— 1984.— *59*, № 4.— С. 565—591.
107. *Maclane S.* Homology.— Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer., 1963.— 422 с. (Пер. на рус. яз.: *Маклейн С.* Гомология.— М.: Мир., 1966.— 544 с.).
108. — Catégories for the working mathematician.— New York; Heidelberg: Berlin: Springer, 1971.— 262 с.
109. *MacPherson R.* Global questions in the topology of singular spaces. Proc. Int. Congr. Math. 1983.— Warsaw: Polish Sci. Publ.— 1984.— С. 213—235.
110. —, *Vilonen K.* Elementary constructions of perverse sheaves // Invent. Math.— 1986.— *84*, № 2.— С. 403—435.
111. —, — Perverse sheaves with singularities along the curve $x^n=y^m$ // Comment. Math. Helv.— 1988.— *63*, № 1.— С. 89—103.
112. *Maisonobe P.* Faiseaux pervers dont le support singulier est un courbe plane // Compos. Math.— 1987.— *62*, № 3.— С. 215—261.
113. *Malgrange B.* L'involutivité des charactéristiques des systemes différentiels et microdifférentiels, Sem. Bourbaki, № 522 // Lect. Notes Math.— 1979.— *710*.— С. 291—300.
114. — Regular connections, after Deligne // [27].— С. 151—172.
115. *May J. P.* Simplicial objects in algebraic topology.— Princeton: Van Nostrand, 1967.
116. *McCleary J.* User's guide to spectral sequences.— Publish or Perish, Wilmington, Delaware (USA), 1985.— 423 с.
117. *Mebhout Z.* Une equivalence des categories // Compos. Math.— 1984.— *51*, № 1.— С. 55—62.
118. — Une autre equivalence des categories // Compos. Math.— 1984.— *51*, № 1.— С. 63—69.
119. *Morgan J.* The algebraic topology of smooth algebraic varieties // Publ. Math. IHES.— 1978.— *48*.— С. 137—204.
120. *Narvaez-Macarro L.* Faiseaux pervers dont le support singulier est le germe d'une courbe plane irreductible // Compos. Math.— 1988.— *65*, № 3.— С. 321—347.
121. *Pham F.* Singularites des systemes differentielles de Gauss—Manin.— Boston: Brikhauser, Progress in Math.— 1979.— *2*.— 339 с.
122. *Quillen D.* Higher algebraic *K*-theory, I. Lect. Notes Math.— 1973.— *341*.— С. 85—147.
123. — Projective modules over polynomial rings // Invent. Math.— 1976.— *36*.— С. 167—171.
124. *Roos J.-E.* Sur les foncteurs derives de lim. Applicasions // C. r. Acad. sci.— 1961.— *252*, № 24.— С. 3702—3704.
125. *Rudakov A. N., Gorodentsev A. L.* Exceptiomal vector bundles on projective spaces // Duke Math. J.— 1987.— *54*, № 1.— С. 115—130.
126. *Saito M.* Modules de Hodge polarisable / Preprint RIMS-553.— Research Inst. Math. Studies, Kyoto.— 1986.
127. *Sato M., Kashiwara M., Kawai T.* Hyperfunctions and pseudodifferential equations // Lect. Notes Math.— 1973.— *287*.— С. 265—529.
128. *Schapira P.* Microdifferential systems in the complex domain.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1985.

129. *Schmid W.* Variations of Hodge structure: the singularities of the period mapping // Invent. Math.— 1973.— *22,* № 2.— C. 211—319.
130. *Serre J.-P.* Homologie singuliere des espaces fibrés. Applications // Ann. Math.— 1951.— *54.*— C. 425—505 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств // В сб.: Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1958.— С. 9—114).
131. — Cohomologie Galoisienne // Lect. Notes Math.— 1965.— *5.*— 217 с. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа.— М.: Мир, 1965.— 208 с.).
132. — Cohomologie des groupes discrets // Ann. Math. Studies.— 1971.— *70.* C. 77—169 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.* Когомологии дискретных групп // Математика.— 1974.— *18,* № 3.— С. 123—144; № 4.— С. 3—33).
133. — Collected papers. Vol. I—III.— Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1986.— 596 с.; 740 с.; 728 с.
134. *Shioda T.* What is known about the Hodge conjecture? // Adv. Stud. Pure Math.— Knokuniya & North Holland, 1983.— *1.*— C. 55—68.
135. *Spaltenstein N.* Resolutions of unbounded complexes // Compos. Math.— 1988.— *65,* № 2.— C. 121—154.
136. *Springer T. A.* Quelques applications de la cohomologie d'intersection. Sem. Bourbaki, № 589 // Asterisque.— 1982.— *92—93.*— C. 249—274.
137. *Stafford J. T.* Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras // Invent. Math.— 1985.— *79,* № 1.— C. 619—638.
138. *Tate J.* *p*-divisible broups // Driebergen Conf. on Local Fields / Ed. T. A. Springer.— Berlin: Springer, 1967.— C. 158—183.
139. Topics in trancendental algebraic geometry / Ed. Griffiths P. A.— Princeton: Univ. Press, 1984.
140. *Verdier J.-L.* Theoreme de dualité de Poincaré // C. r. Acad. sci.— 1963.— *256.*— C. 2084—2086.
141. — Categories derivées, etat 0 // Lect. Notes Math.— 1977.— *569.*— C. 262—311.
142. — Extension of a perverse sheaf over a closed subspace // Asterisque.— 1985.— *130.*— C. 210—217.
143. *Vogan D., Jr.* Representations of real reductive Lie groups.— Boston: Birkhauser, 1981.— xvii+754 c.
144. *Weil A.* Basic number theory.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.— 294 с. (Пер. на рус. яз.: *Вейль А.* Основы теории чисел.— М.: Мир, 1972.— 408 с.)
145. *Wells R. O.* Differential analysis on complex manifolds.— Englwood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1973. (Пер. на рус. яз.: *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.— 284 с.)
146. *Zariski O., Samuel P.* Commutative algebra, v. I, II.— Toronto; London; New York: Van Nostrand, 1958; 1960. (Пер. на рус. яз.: *Зариский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра, Т. 1, 2.— М.: ИЛ, 1963, 373 с.; 438 с.)

УДК 512.66

С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. Гомологическая алгебра // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — 1989. — 38. — с. 5—238

Излагаются основные вопросы гомологической алгебры. Главное внимание уделяется современному подходу к гомологической алгебре, основанному на использовании производных категорий и производных функторов. Излагается также ряд классических результатов гомологической алгебры, включая спектральные последовательности, когомологии групп и алгебр Ли (в том числе бесконечномерных), циклические гомологии, когомологии пучков. Описывается также использование языка гомологической алгебры в теории структур Ходжа, превратных пучков, D-модулей. Библ. 146.